Reprezentarea Suprafețelor

Suprafețe – definiție matematică

➲ Ecuație implicită:

$$F(x, y, z) = 0$$

Suprafețe – definiție matematică

➲ Ecuație explicită:

$$x = f_x(y, z),$$
$$y = f_y(x, z),$$
$$z = f_z(x, y)$$

Suprafețe – definiție matematică

➲ Ecuațiile parametrice:

$$\begin{cases} x = f_x(u,v) \\ y = f_y(u,v) \\ z = f_z(u,v) \end{cases} \quad \begin{array}{l} u_{\min} \le u \le u_{\max} \\ v_{\min} \le v \le v_{\max} \end{array}$$

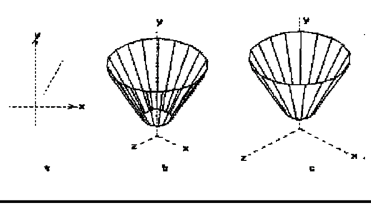
Suprafețe – definiție matematică

➲ Ecuațiile parametrice – avantaje:
- Reprezentare independentă de orice sistem de coordonate
- pot fi reprezentate suprafețe definite prin funcții cu valori multiple
- transformările 3D exprimate în coordonate omogene pot fi aplicate direct asupra ecuațiilor parametrice
- Sunt în mod inerent limitate, prin domeniul de variație al variabilelor parametrice; alegând domeniul pentru fiecare variabilă se poate defini orice porțiune a suprafeței
- Mai multe grade de libertate pentru controlul formei unei suprafețe.

Suprafețe de Rotație

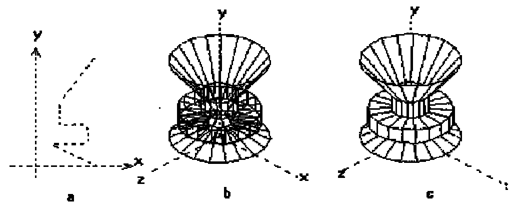
➲ Se obțin prin rotația unui obiect plan în jurul unei axe 3D.

➲ Exemple:
- Cilindru
- Trunchi de con



Suprafețe de Rotație

➲ Alt exemplu – o polilinie



Suprafețe de Rotație

➲ Vizualizare

- Se pornește de la ecuația parametrică a obiectului generator

$$p(u) = [x(u) \quad y(u) \quad z(u)], \quad 0 \le u \le u_{max}$$

- Punctele depind de unghiul de rotație φ ⇒ o suprafață de rotație este descrisă printr-o funcție de doi parametri

$$S(u,\varphi) = [x(u)\cdot\cos\varphi \quad y(u) \quad -x(u)\cdot\sin\varphi]$$

Suprafețe de Rotație

➲ Exemplu – segmentul $P_1(x_1,y_1,0)$-$P_2(x_2,y_2,0)$

$$S(u,\varphi)=[(x_1+u(x_2-x_1))\cdot\cos\varphi \quad y_1+u(y_2-y_1) \quad -(x_1+u(x_2-x_1))\cdot\sin\varphi]$$

➲ Polilinie/poligon $(P_1,P_2,\ldots P_n)$: se scrie ecuația suprafeței pentru fiecare segment P_i-P_{i+1}

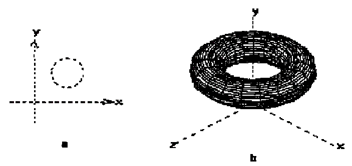
$$S_i(u,\varphi)=[x_i(u)\cdot\cos\varphi \quad y_i(u) \quad -x_i(u)\cdot\sin\varphi], \quad 1\le i\le n-1$$

Suprafețe de Rotație

- Sferă - semicerc rotit în jurul lui Ox
  - Ecuația semicercului:
$$x(\theta) = r \cdot \cos(\theta)$$
$$y(\theta) = r \cdot \sin(\theta), \quad 0 \le \theta \le \pi$$
  - Ecuația sferei:
$$S(\theta,\varphi) = [x(\theta) \quad y(\theta)\cdot\cos\varphi \quad y(\theta)\cdot\sin\varphi]$$
$$\begin{cases} x = r\cdot\cos\theta \\ y = r\cdot\sin\theta\cdot\cos\varphi \\ z = r\cdot\sin\theta\cdot\sin\varphi \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \le \theta \le \pi \\ 0 \le \varphi \le 2\pi \end{matrix}$$

Suprafețe de Rotație

- Torul



$$x(\theta) = xc + r\cdot\cos\theta$$
$$y(\theta) = yc + r\cdot\sin\theta, \quad 0 \le \theta \le 2\pi$$
$$\begin{cases} x(\theta,\varphi) = (xc + r\cdot\cos\theta)\cdot\cos\varphi \\ y(\theta,\varphi) = yc + r\cdot\sin\theta \\ z(\theta,\varphi) = -(xc + r\cdot\cos\theta)\cdot\sin\varphi \end{cases} \quad 0 \le \varphi \le 2\pi$$

Vizualizarea Suprafețelor de Rotație

1. Definirea obiectului generator
2. Definirea axei de rotație
3. Calculul unui set de puncte de pe suprafață
4. Proiecția punctelor calculate în pasul 3
5. Calculul încadrării în plan (x_{min}, y_{min}, x_{max}, y_{max})
6. Afişarea suprafeței:
   - Două familii de curbe
   - Rețea poligonală

Suprafețe de Translație

- Translatarea unui obiect de-a lungul unei traiectorii:
  - Dreaptă
  - Curbă în spațiu
- Generarea suprafețelor prin rotație este un caz particular – traiectorie circulară

Suprafețe de Translație

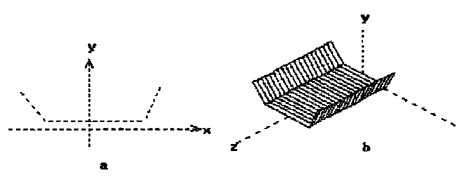
- Cea mai simplă suprafață - translația unui segment de dreaptă:

$$P(u) = P_1 + u(P_2 - P_1)$$
$$= [x_1 + u(x_2 - x_1) \quad y_1 + u(y_2 - y_1) \quad z_1 + u(z_2 - z_1)] \qquad u \in [0,1]$$

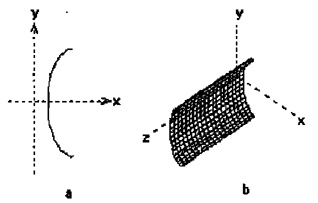
- Ecuația suprafeței:

$$S(u,t) = P(u) \cdot T(t) \qquad u \in [0,1], t \in [0,1] \qquad T(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & d \cdot t & 1 \end{bmatrix}$$

Suprafețe de Translație

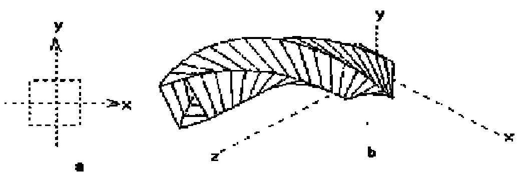


Suprafețe de Translație



Suprafețe de Translație

$$T(t)=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(2\pi t) & \sin(2\pi t) & 0 \\ 0 & -\sin(2\pi t) & \cos(2\pi t) & 0 \\ d\cdot t & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad t\in[0,1]$$

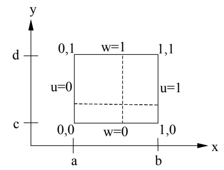


Suprafețe de Interpolare/Aproximare

- Noțiunea de *patch*

$$\begin{aligned} x &= X(u,w) \\ y &= Y(u,w) \\ z &= Z(u,w) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} u_{min} &\le u \le u_{max} \\ w_{min} &\le w \le w_{max} \end{aligned}$$

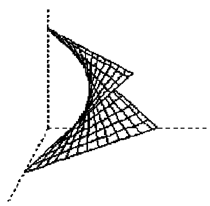
Suprafețe de Interpolare/Aproximare



$$x = a + (b-a)u = P_0.x + (P_1.x - P_0.x)u$$
$$y = c + (d-c)w = P_0.y + (P_3.y - P_0.y)w$$
$$z = 0$$

Suprafețe biliniare

- Determinată de 4 puncte P_1, P_2, P_3, P_4 – colțurile pătratului unitate



$$p(u,w) = P_0(1-u)(1-w) + P_1(1-u)w + P_2u(1-w) + P_3uw$$

$$p(u,w) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w & w \end{bmatrix}^T$$

Suprafețe de Interpolare/Aproximare

- *Patch*-uri bicubice
- Rețele de *patch*-uri

$$p(u,w) = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{3} a_{ij} u^i w^j, \quad u \in [0,1] \quad w \in [0,1]$$

$$p = U \cdot A \cdot W^T$$

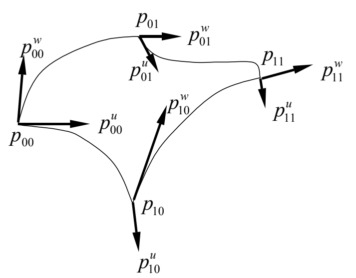
Suprafețe de Interpolare/Aproximare

- Notații:
  - Colțurile *patch*-ului

    $p_{00} = p(0,0) \quad p_{01} = p(0,1) \quad p_{10} = p(1,0) \quad p_{11} = p(1,1)$
  - Cele patru curbe mărginitoare

    $p_{u0} = p(u,0) \quad p_{u1} = p(u,1) \quad p_{0w} = p(0,w) \quad p_{1w} = p(1,w)$
  - Tangentele în colțuri $\quad p_{uw}^{u} = \dfrac{\partial p(u,w)}{\partial u} \quad p_{uw}^{w} = \dfrac{\partial p(u,w)}{\partial w}$
  - Vectorii de răsucire $\quad p_{uw}^{uw} = \dfrac{\partial^2 p(u,w)}{\partial u \partial w}$

Suprafețe de Interpolare/Aproximare



Suprafețe bicubice

- Forma generală a unei curbe parametrice cubice:

  $C(t) = T \cdot M \cdot G \qquad C(u) = U \cdot M \cdot G$
- Punctele din *G* – parametrizate după *w*:

$$Q(u,w) = U \cdot M \cdot \begin{bmatrix} G_1(w) \\ G_2(w) \\ G_3(w) \\ G_4(w) \end{bmatrix}$$

Suprafețe bicubice

- $G_i(w)$ – cubice:

$$G_i(w) = W \cdot M \cdot G_i, \quad G_i = \begin{bmatrix} g_{i1} \\ g_{i2} \\ g_{i3} \\ g_{i4} \end{bmatrix}$$

$$(A \cdot B \cdot C)^T = C^T \cdot B^T \cdot A^T \quad \Rightarrow \quad G_i(w) = \begin{bmatrix} g_{i1} \\ g_{i2} \\ g_{i3} \\ g_{i4} \end{bmatrix}^T \cdot M^T \cdot W^T$$

Suprafețe bicubice

- Obținem:

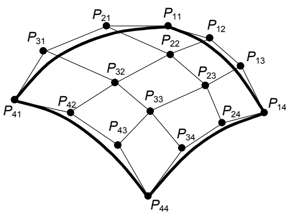
$$Q(u,w) = U \cdot M \cdot \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{bmatrix} \cdot M^T \cdot W^T$$

- Sau:

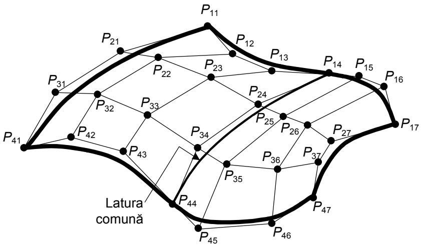
$$Q(u,w) = U \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot W^T, \qquad 0 \le u, w \le 1$$

Suprafețe Bézier

$$Q_B(u,w) = U \cdot M_B \cdot G_B \cdot M_B^T \cdot W^T$$

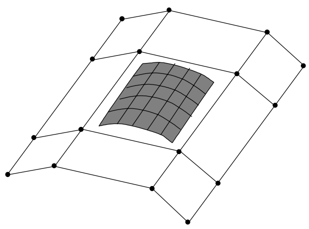


Suprafețe Bézier



Suprafețe B-Spline

$$Q_S(u,w) = U \cdot M_S \cdot G_S \cdot M_S^T \cdot W^T$$



Suprafețe Hermite

$$Q_H(u,w) = U \cdot M_H \cdot G_H \cdot M_H^T \cdot W^T$$

$$G_H = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{00}^w & p_{01}^w \\ p_{10} & p_{11} & p_{10}^w & p_{11}^w \\ p_{00}^u & p_{01}^u & p_{00}^{uw} & p_{01}^{uw} \\ p_{10}^u & p_{11}^u & p_{10}^{uw} & p_{11}^{uw} \end{bmatrix}$$

Vizualizarea Suprafețelor bicubice

- Două metode:
  - Două familii de curbe: *u*=constant, *w*=constant
  - Rețea poligonală - divizare
- Calculul normalei

$$\frac{\partial Q(u,w)}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u}\left(U \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot W^T\right) = \frac{\partial}{\partial u}(U) \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot W^T = \begin{bmatrix}3u^2 & 2u & 1 & 0\end{bmatrix} \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot W^T$$

$$\frac{\partial Q(u,w)}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial w}\left(U \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot W^T\right) = U \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \frac{\partial}{\partial w}\left(W^T\right) = U \cdot M \cdot G \cdot M^T \cdot \begin{bmatrix}3w^2 & 2w & 1 & 0\end{bmatrix}^T$$