Reprezentarea Curbelor şi Suprafeţelor

Descrierea Parametrică a Curbelor

- În 2D:
  - *y = f(x)* , x = variabilă independentă
  - *x = g(y)*, y = variabilă independentă
- Reprezentare explicită
- Probleme:
  - Pantă infinită
  - Bucle

Descrierea Parametrică a Curbelor

- Rezolvare: utilizarea unei variabile independente ⇒ *parametru*:
  $x = X(u)$, $y = Y(u)$, $u \in [a,b]$
- Un punct P_i de pe curbă: $P_i[X(u_i),Y(u_i)]$, cu u_i în intervalul [a,b]
- Panta tangentei la curbă în P_i: $$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{du}}{\frac{dx}{du}}$$

Descrierea Parametrică a Curbelor

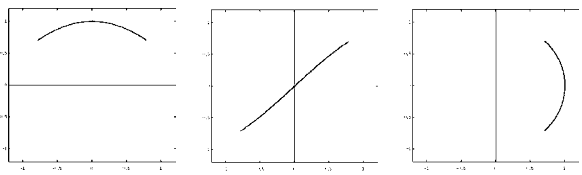
- Exemplu:
  - Ecuația implicită *x2 + y2 = 1* ⇒

$$y = \pm\sqrt{1-x^2}$$

  - Utilizând un parametru:

$$C:\begin{cases} x = \cos(u) \\ y = \sin(u) \end{cases} \quad , \quad u \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Descrierea Parametrică a Curbelor



$x = \cos(u)$ $y = \sin(u)$

Descrierea Parametrică a Curbelor

- În 3D:

y = f(x) ,z = g(x)

- În forma parametrică:

$$\begin{cases} x = X(u) \\ y = Y(u) \\ z = Z(u) \end{cases} \quad , \quad u \in [a,b]$$

Curbe Cubice Parametrizate

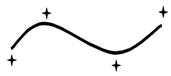
- Problemă: un set de puncte $\{P_i, i=0,n\}$

⇒ o curbă ***netedă*** care să conecteze aceste puncte

Curbe Cubice Parametrizate

Curbă de interpolare

Curbă de aproximare



Descriere parametrică: $C(t)=[x(t),y(t)]$, $t\in[0,1]$

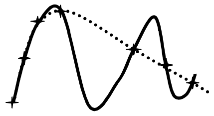
Curbe Cubice Parametrizate

Funcții polinomiale de grad *n*

⇒ oscilații între punctele de control

Rezolvare: curbe cubice

Polinom de grad 6:



Curbe Cubice Parametrizate

Curbă cubică parametrizată – set de funcții polinomiale de grad 3:

$$C(t): \begin{cases} x(t) = a_x t^3 + b_x t^2 + c_x t + d_x \\ y(t) = a_y t^3 + b_y t^2 + c_y t + d_y \\ z(t) = a_z t^3 + b_z t^2 + c_z t + d_z \end{cases} \qquad P(t_i) = [x(t_i), y(t_i), z(t_i)], \quad t_i \in [0,1]$$

Curbe Cubice Parametrizate

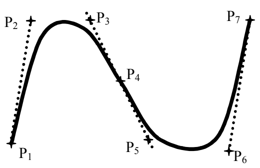
Proprietăți:

- Curbe de ordin minim care asigură continuitate de ordin 1 şi 2
- Curbe de ordin minim care pot descrie curbe non-planare

Curbele de ordin superior – improprii pentru grafica pe calculator (oscilații)

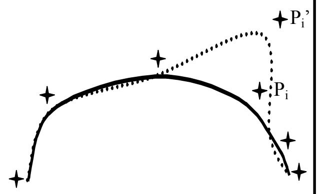
Curbe Cubice Parametrizate

Mai multe puncte de control – subseturi de câte patru puncte consecutive



Curbe Cubice Parametrizate

Aspect esențial:
controlul local



Curba Hérmite

Este determinată de două puncte şi tangentele la curbă în aceste puncte

$$\begin{matrix} P_0[P_{0x} & P_{0y} & P_{0z}] \\ P_3[P_{3x} & P_{3y} & P_{3z}] \\ R_0[R_{0x} & R_{0y} & R_{0z}] \\ R_3[R_{3x} & R_{3y} & R_{3z}] \end{matrix}, \quad R_{0x} = \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} \quad R_{0y} = \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} \quad R_{0z} = \left.\frac{dz}{dt}\right|_{t=0}$$

$$\begin{cases} x(0) = P_{0x} \\ x(1) = P_{3x} \end{cases} \quad \begin{cases} x'(0) = R_{0x} \\ x'(1) = R_{3x} \end{cases}$$

Curba Hérmite

$$x(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}_x = T \cdot C_x$$

$$x'(t) = \begin{bmatrix} 3t^2 & 2t & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot C_x = T' \cdot C_x$$

Curba Hérmite

$$C_x = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_0 \\ P_3 \\ R_0 \\ R_3 \end{bmatrix}_x = M_h \cdot G_{hx}$$

$$\begin{cases} x(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hx} \\ y(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hy}, \quad t \in [0,1] \\ z(t) = T \cdot M_h \cdot G_{hz} \end{cases}$$

M_h – matricea curbei Hermite

G_{hx} – vectorul geometric tip Hermite

Curba Hérmite

3 puncte: P_1, P_4, $P_7 \Rightarrow$ 2 curbe Hermite

$$G_h^{(1)} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_4 \\ R_1 \\ R_4 \end{bmatrix} \quad G_h^{(2)} = \begin{bmatrix} P_4 \\ P_7 \\ kR_4 \\ R_7 \end{bmatrix}$$

Curba Bézier

Funcții polinomiale Bernstein

$$b_i(u) = C_n^i u^i \cdot (1-u)^{n-i}, \quad i = 0,\ldots,n \quad u \in [0,1]$$

Proprietăți: $b_0(0) = 1 \quad b_n(1) = 1$

$b_i(0) = 0 \quad b_i(1) = 0$

Pentru gradul 3:

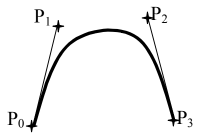
b_0	b_1	b_2	b_3
$(1-u)^3$	$3u(1-u)^2$	$3u^2(1-u)$	u^3

Curba Bézier generală

N+1 puncte de control $P_0,\ldots P_n$

Forma parametrică (gradul *n*):

$$C(u)=\begin{cases} X(u)=\sum_{i=0}^{n} P_{ix}\cdot b_i(u) \\ Y(u)=\sum_{i=0}^{n} P_{iy}\cdot b_i(u), & u\in[0,1] \\ Z(u)=\sum_{i=0}^{n} P_{iz}\cdot b_i(u) \end{cases}$$



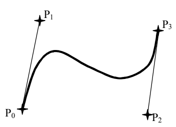
Curba Bézier cubică

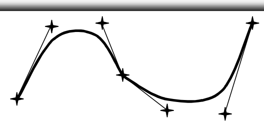
4 puncte de control P_0, P_1, P_2, P_3

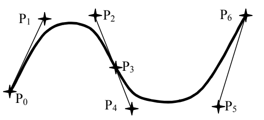
$$x(t)=P_{0x}(1-t)^3+P_{1x}3t(1-t)^2+P_{2x}3t^2(1-t)+P_{3x}t^3$$

$$x(t)=\begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{0x} \\ P_{1x} \\ P_{2x} \\ P_{3x}\end{bmatrix} \quad C(t)=\begin{cases} x(t)=T\cdot M_b\cdot G_{bx} \\ y(t)=T\cdot M_b\cdot G_{by}, & t\in[0,1] \\ z(t)=T\cdot M_b\cdot G_{bz}\end{cases}$$

Curba Bézier cubică







Curbe B-spline Cubice

N+1 puncte de control

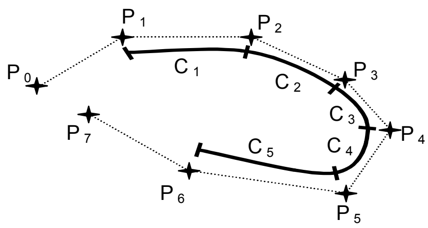
N-2 curbe elementare

4 puncte de control: P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}

$$\underbrace{[P_0\ \ P_1\ \ P_2\ \ P_3]}_{C^1}\ \underbrace{[P_4\ \ P_5\ \ P_6\ \ P_7]}_{C^2}\ \dots\ \underbrace{[P_{n-3}\ \ P_{n-2}\ \ P_{n-1}\ \ P_n]}_{C^{n-2}}$$

Curbe B-spline Cubice

Exemplu:



Curbe B-spline Cubice

$$C^i \begin{cases} x^i(t) = T \cdot M_S \cdot G^i_{Sx} \\ y^i(t) = T \cdot M_S \cdot G^i_{Sy}, \quad i = \overline{1, n-2} \\ z^i(t) = T \cdot M_S \cdot G^i_{Sz} \end{cases} ,$$

$$T = [t^3\ \ t^2\ \ t\ \ 1] \quad t \in [0,1]$$

$$G^i_{Sx} = \begin{bmatrix} P_{i-1} \\ P_i \\ P_{i+1} \\ P_{i+2} \end{bmatrix}_x$$

Curbe B-spline Cubice

Matricea Spline:

$$M_s = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Proprietăți:

- Continuitate de ordin 0, 1 şi 2
  - $x^{i}(1)=x^{i+1}(0)$, $x^{i\prime}(1)=x^{i+1\prime}(0)$, $x^{i\prime\prime}(1)=x^{i+1\prime\prime}(0)$,
- Control local
- Repetarea unui punct de control
- Curbe închise: [P_3 P_0 P_1 P_2 P_3 P_0 P_1]

Comparații

Curba Hermite
Curba Bezier
Curba B-spline

Divizarea curbelor

Câteva metode de vizualizare a curbelor definite prin ecuații parametrice.

- Calculul unei succesiuni de puncte de pe curba de vizualizat, prin eşantionarea intervalului [0,1] cu un pas constant.

Altă metodă - divizarea recursivă a curbei.

- Pentru determinarea intersecției unei curbe parametrice cu un alt obiect.
- Se începe prin calculul punctului de pe curbă corespunzător valorii 0,5 a variabilei parametrice; → două segmente de curbă.
- În continuare se calculează punctul de mijloc pentru fiecare dintre cele două jumătăți, şi aşa mai departe,
- Până când segmentele de curbă la care s-a ajuns satisfac un anumit *criteriu dependent de aplicație*.

Divizarea curbelor

curbă parametrică cubică $C(u)=\begin{bmatrix}u^3 & u^2 & u & 1\end{bmatrix}\cdot M\cdot G \qquad 0\le u\le 1$

Două părți: 0 ≤ u ≤ 0,5 , 0,5 ≤ u ≤ 1.

Prima jumătate - variabila parametrică u1∈[0,1] (u∈[0,0.5]).

$$C1(u1)=C(u1/2)=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}u1^3 & u1^2 & u1 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&4&0\\0&0&0&8\end{bmatrix}\cdot M\cdot G=$$

$$=\begin{bmatrix}u1^3 & u1^2 & u1 & 1\end{bmatrix}\cdot S1\cdot M\cdot G \qquad 0\le u1\le 1$$

Divizarea curbelor

Altă formă: $C1(u1)=\begin{bmatrix}u1^3 & u1^2 & u1 & 1\end{bmatrix}\cdot M\cdot G1=U\cdot M\cdot G1$

Identificăm cele două expresii ale curbei C1:

$$M\cdot G1=S1\cdot M\cdot G \quad\Rightarrow\quad M^{-1}\cdot M\cdot G1=M^{-1}\cdot S1\cdot M\cdot G$$

Notăm

$$H1=M^{-1}\cdot S1\cdot M$$

Deci

$$G1=H1\cdot G$$

Divizarea curbelor

Matricea H2 pentru a doua jumătate a curbei:

u → (u2 + 1) / 2. (u2∈[0,1], u∈[0.5,1])

$$C2(u2)=C((u2+1)/2)=\begin{bmatrix}u2^3 & u2^2 & u2 & 1\end{bmatrix}\cdot S2\cdot M\cdot G=U\cdot M\cdot G2$$

$$S2=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\3&2&0&0\\3&4&4&0\\1&2&4&8\end{bmatrix}$$

$$H2=M^{-1}\cdot S2\cdot M \qquad \Rightarrow G2=H2\cdot G$$

Divizarea cubicelor Bézier

Calculăm H1 şi H2 particularizând matricea M:

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$H1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix} \qquad H2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

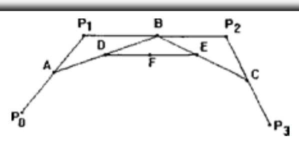
Divizarea cubicelor Bézier

P_0, P_1, P_2, P_3 - punctele de control ale curbei originale.

H1⇒

$$S_0 = P_0$$
$$S_1 = P_0/2 + P_1/2$$
$$S_2 = P_0/4 + P_1/2 + P_2/4$$
$$S_3 = P_0/8 + 3P_1/8 + 3P_2/8 + P_3/8$$

Divizarea cubicelor Bézier



$A = (P_0 + P_1)/2 \quad B = (P_1 + P_2)/2 \quad C = (P_2 + P_3)/2$

$D = (A + B)/2 \quad E = (B + C)/2 \quad F = (D + E)/2$

prima jumătate a curbei:

$S_0 = P_0 \quad S_1 = A$

$S_2 = D \quad S_3 = F$

a doua jumătate a curbei:

$Q_0 = F \quad Q_1 = E$

$Q_2 = C \quad Q_3 = P_3$

Divizarea cubicelor B-spline

$P_0, P_1, \ldots, P_n$ - punctele de control.

$C_i(u)$ segmentul de curbă definit pe intervalul $P_{i-1}, P_i, P_{i+1}, P_{i+2}$.

$$H1=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}4&4&0&0\\1&6&1&0\\0&4&4&0\\0&1&6&1\end{bmatrix}\qquad H2=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}1&6&1&0\\0&4&4&0\\0&1&6&1\\0&0&4&4\end{bmatrix}$$

prima jumătate: $[S_{i-1}\quad S_i\quad S_{i+1}\quad S_{i+2}]=H_1\cdot[P_{i-1}\quad P_i\quad P_{i+1}\quad P_{i+2}]^T$

a doua jumătate: $[Q_{i-1}\quad Q_i\quad Q_{i+1}\quad Q_{i+2}]=H_2\cdot[P_{i-1}\quad P_i\quad P_{i+1}\quad P_{i+2}]^T$

Divizarea cubicelor B-spline

prima jumătate:

$$[S_{i-1}\quad S_i\quad S_{i+1}\quad S_{i+2}]=H_1\cdot[P_{i-1}\quad P_i\quad P_{i+1}\quad P_{i+2}]^T$$

a doua jumătate:

$$[Q_{i-1}\quad Q_i\quad Q_{i+1}\quad Q_{i+2}]=H_2\cdot[P_{i-1}\quad P_i\quad P_{i+1}\quad P_{i+2}]^T$$

$$Q_{i-1}=S_i,\quad Q_i=S_{i+1},\quad Q_{i+1}=S_{i+2}$$

Divizarea cubicelor B-spline

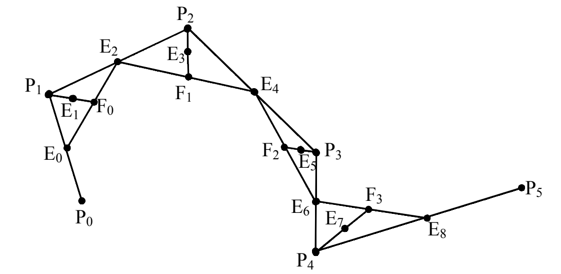
Pentru o curbă dată prin 6 puncte de control:

Prima jumătate a curbei: S_0, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5,

A doua jumătate, Q_0, Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, Q_5

$$S_3=Q_0,\quad S_4=Q_1,\quad S_5=Q_2$$

Divizarea cubicelor B-spline



Divizarea cubicelor B-spline

$E_0 = (P_0 + P_1)/2$

$E_2 = (P_1 + P_2)/2 \quad E_4 = (P_2 + P_3)/2$

$E_6 = (P_3 + P_4)/2 \quad E_8 = (P_4 + P_5)/2$

$F_0 = (E_0 + E_2)/2 \quad F_1 = (E_2 + E_4)/2$

$F_2 = (E_4 + E_6)/2 \quad F_3 = (E_6 + E_8)/2$

$E_1 = (P_1 + F_0)/2 \quad E_3 = (P_2 + F_1)/2$

$E_5 = (P_3 + F_2)/2 \quad E_7 = (P_4 + F_3)/2$

$S_0 = E_0, \quad S_1 = E_1, \quad S_2 = E_2, \quad S_3 = E_3, \quad S_4 = E_4, \quad S_5 = E_5$

$Q_0 = E_3, \quad Q_1 = E_4, \quad Q_2 = E_5, \quad Q_3 = E_6, \quad Q_4 = E_7, \quad Q_5 = E_8$

Conversia între reprezentări

Un segment de curbă, C $p(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M \cdot P$

Reprezentare echivalentă: $p'(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \cdot M' \cdot P'$

Condiția: $M \cdot P = M' \cdot P'$

$P' = [M']^{-1} \cdot M \cdot P$

Exemplu: B-spline → Bézier

$$P' = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot P$$