Logică și structuri discrete

Logică propozițională. Aplicații

https://tinyurl.com/lecturesLSD

Cum codificăm probleme în logică propozițională?

Cum determinăm dacă o formulă e *realizabilă*?

algoritm folosit în rezolvarea multor probleme

Unde aplicăm logica booleană?

Calculatoarele sunt construite din *circuite logice*
⇒ realizează aceleași *funcții* ca în logică (ȘI, SAU, NU)

Numerele sunt reprezentate în calculator *în baza 2*
⇒ valori *boolene* / biți: (0 sau 1, F sau T)

Aritmetica pe numere e implementată prin circuite logice

```
unsigned add(unsigned a, unsigned b) {
  return b ? add(a^b, (a&b) << 1) : a;
}
```

```
let rec add a b =
  if b = 0 then a else add (a lxor b) ((a land b) lsl 1)
```

Mulțimile pot fi reprezentate prin *vectori* de valori *boolene*
pentru fiecare element: T/F, face sau nu parte din mulțime ?

⇒ reprezentăm noțiuni (reale sau matematice) în *logică booleană*

Aplicații: Căutare / explorarea stărilor / planificarea

Putem ajunge la o poziție câștigătoare într-un joc ?

Există un drum între două noduri într-un graf ?

Planificare = găsirea unui șir de *acțiuni* care duc la o *țintă*

de la ordonarea unor acțiuni între care există constrângeri
până la comportamentul unor roboți inteligenți / autonomi

În general: într-un sistem descris prin *stări* și *acțiuni* (tranziții),
cum găsim o cale de la o *stare inițială* la o *stare țintă* (finală) ?

Exemplu: jocul cu ordonarea a 3x3 piese

Se poate reface ordinea? Din câte mutări?

2		5
1	3	4
8	6	7

Numerotăm pozițiile:

```
123
456
789
```

Trebuie să codificăm *starea* (configurația): poziția pieselor

Putem alege un vector $\bar{v} = (p_1, p_2, \ldots, p_9)$, $p_i \in [0..8]$ $(0 = \text{liber})$

fiecare valoare p_i poate fi reprezentată boolean (cu 4 biți)

$p_1 = 2 \wedge p_2 = 0 \wedge p_3 = 5 \wedge \ldots$

sau direct cu booleni p_{ij} = piesa i (1..8) e pe poziția j (1..9)

$\neg p_{11} \wedge \neg p_{12} \wedge \neg p_{13} \wedge p_{14} \wedge \ldots$ piesa 1 e pe poz. 4 (doar acolo)

$p_{21} \wedge \neg p_{22} \wedge \neg p_{23} \wedge \neg p_{24} \wedge \ldots$ piesa 2 e pe poz. 1

...

O *stare* poate fi descrisă printr-o *formulă propozițională*

Cum reprezentăm o mutare?

O mutare se face între 2 stări: *starea curentă* și *starea următoare*, reprezentate prin *vectori de stare* $\bar{v}$ și $\bar{v}'$, fiecare cu propozițiile sale:

$$\bar{v} = (p_{11}, p_{12}, ...) \quad \text{și} \quad \bar{v}' = (p'_{11}, p'_{12}, ...) \text{ și}$$

```
123
456
789
```

Sunt 12 perechi de poziții vecine: $\{(1,2),(1,4),\ldots(8,9)\}$

Introducem 12 propoziții: m_{12} = mutarea între poz. 1 și 2, etc.

Dacă facem mutarea m_{12}:

piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

piesele de pe alte poziții (3, 4, ... 9) rămân pe loc

Reprezentarea unei mutări (cont.)

$\boxed{p_{ij} = \text{piesa } i \text{ e pe poziția } j}$

(1) *Dacă* facem mutarea m_{12}:
piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

$(m_{12} \rightarrow p'_{11} = p_{12})$	1 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \rightarrow p'_{12} = p_{11})$	1 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1
$\wedge\ (m_{12} \rightarrow p'_{21} = p_{22})$	2 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \rightarrow p'_{22} = p_{21})$	2 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1

...

Reprezentarea unei mutări (cont.)

$\boxed{p_{ij} = \text{piesa } i \text{ e pe poziția } j}$

(1) *Dacă* facem mutarea m_{12}:
piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

$(m_{12} \to p'_{11} = p_{12})$	1 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{12} = p_{11})$	1 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{21} = p_{22})$	2 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{22} = p_{21})$	2 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1

...

Rescriem în CNF:

$$(\neg m_{12} \vee \neg p'_{11} \vee p_{12}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{11} \vee \neg p_{12})$$
$$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{12} \vee p_{11}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{12} \vee \neg p_{11})$$
$$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{21} \vee p_{22}) \wedge (\neg m_{21} \vee p'_{21} \vee \neg p_{22}) \ \ldots$$

Reprezentarea unei mutări (cont.)

p_{ij} =piesa i e pe poziția j

(1) *Dacă* facem mutarea m_{12}:

piesa de pe poz. 1 în $\bar{v}$ va fi pe poz. 2 în $\bar{v}'$ și reciproc

$(m_{12} \to p'_{11} = p_{12})$	1 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{12} = p_{11})$	1 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{21} = p_{22})$	2 va fi pe poz. 1 doar dacă era pe poz. 2
$\wedge\ (m_{12} \to p'_{22} = p_{21})$	2 va fi pe poz. 2 doar dacă era pe poz. 1

...

Rescriem în CNF:

$$(\neg m_{12} \vee \neg p'_{11} \vee p_{12}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{11} \vee \neg p_{12})$$
$$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{12} \vee p_{11}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{12} \vee \neg p_{11})$$
$$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{21} \vee p_{22}) \wedge (\neg m_{21} \vee p'_{21} \vee \neg p_{22}) \ \ldots$$

(2) *Dacă* facem mutarea m_{12}

piesele de pe alte poziții (3, 4, ... 9) rămân pe loc

$(\neg m_{12} \vee \neg p'_{13} \vee p_{13}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{13} \vee \neg p_{13})$	piesa 1 pe poz. 3
$\wedge\ (\neg m_{12} \vee \neg p'_{23} \vee p_{23}) \wedge (\neg m_{12} \vee p'_{23} \vee \neg p_{23})$	piesa 2 pe poz. 3

...

la fel pentru toate cele *12 mutări*

Constrângeri pentru mutări

(3) Nu putem face ~~*două mutări*~~ odată.

Deci pentru orice două mutări distincte, $12 \cdot (12-1)/2$ perechi:

$\neg(m_{12} \wedge m_{23})$ adică $(\neg m_{12} \vee \neg m_{23})$

$\neg(m_{12} \wedge m_{14})$ adica $(\neg m_{12} \vee \neg m_{14})$ ...

Constrângeri pentru mutări

(3) Nu putem face *~~două mutări~~* odată.
Deci pentru orice două mutări distincte, $12 \cdot (12 - 1)/2$ perechi:

$$\neg(m_{12} \wedge m_{23}) \quad \text{adică} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{23})$$
$$\neg(m_{12} \wedge m_{14}) \quad \text{adica} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{14}) \qquad \ldots$$

(4) *Trebuie* să facem una din mutările asociate unei poziții libere:

$$(\neg p_{11} \wedge \neg p_{21} \wedge \ldots \wedge \neg p_{81} \rightarrow m_{12} \vee m_{14}) \qquad \text{poz. 1 liberă}$$
$$\wedge\ (\neg p_{12} \wedge \neg p_{22} \wedge \ldots \wedge \neg p_{82} \rightarrow m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25})\ \ldots \qquad \text{poz. 2 liberă}$$

sau în CNF:

$$(p_{11} \vee p_{21} \vee \ldots \vee p_{81} \vee m_{12} \vee m_{14})$$
$$\wedge\ (p_{12} \vee p_{22} \vee \ldots \vee p_{82} \vee m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25}) \qquad \ldots$$

Constrângeri pentru mutări

(3) Nu putem face ~~*două mutări*~~ odată.
Deci pentru orice două mutări distincte, $12 \cdot (12-1)/2$ perechi:

$$\neg(m_{12} \wedge m_{23}) \quad \text{adică} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{23})$$
$$\neg(m_{12} \wedge m_{14}) \quad \text{adica} \quad (\neg m_{12} \vee \neg m_{14}) \qquad \ldots$$

(4) *Trebuie* să facem una din mutările asociate unei poziții libere:

$$(\neg p_{11} \wedge \neg p_{21} \wedge \ldots \wedge \neg p_{81} \rightarrow m_{12} \vee m_{14}) \qquad \text{poz. 1 liberă}$$
$$\wedge\ (\neg p_{12} \wedge \neg p_{22} \wedge \ldots \wedge \neg p_{82} \rightarrow m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25}) \ \ldots \qquad \text{poz. 2 liberă}$$

sau în CNF:

$$(p_{11} \vee p_{21} \vee \ldots \vee p_{81} \vee m_{12} \vee m_{14})$$
$$\wedge\ (p_{12} \vee p_{22} \vee \ldots \vee p_{82} \vee m_{12} \vee m_{23} \vee m_{25}) \qquad \ldots$$

Putem face o mutare *doar* dacă una din cele două poziții e *liberă*:
e implicată de constrângerile de mai sus: *trebuie* făcută o mutare pentru o poziție liberă și nu putem face două mutări

Relația de tranziție

Constrângerile de mai sus definesc *legătura* dintre starea curentă (vectorul de propoziții $\bar{v}$) și starea următoare (vectorul $\bar{v}'$).

am introdus și propozițiile auxiliare m_{ij} (care nu țin de stare), dar le-am putea elimina

Legătură = *relație* . Nu e o ~~*funcție*~~ pentru că putem face mai multe mutări (2, 3 sau 4) și ajunge în mai multe stări succesor.

Combinând constrângerile (1)-(4) avem deci o formulă $R(\bar{v}, \bar{v}')$ care depinde de propozițiile p_{ij} din vectorul de stare $\bar{v}$ și p'_{ij} din $\bar{v}'$:

$R(\bar{v}, \bar{v}')$ e *relația de tranziție*: descrie cum evoluează sistemul.

Relația de tranziție poate fi descrisă printr-o formulă propozițională

Soluția problemei e un șir de mutări

Să presupunem că am reușit să ordonăm piesele în k mutări.

Avem deci $k+1$ stări (configurații): $\bar{v}^0 \to \bar{v}^1 \to ... \to \bar{v}^k$.

• *Starea inițială* $\bar{v}^0 = (p_{11}^0, p_{12}^0, ...)$ satisface o formulă:
$S_i(\bar{v}^0) = p_{14}^0 \wedge p_{21}^0 \wedge ...$ (1 pe poz. 4, 2 pe poz. 1, ...)

• *Starea finală* $\bar{v}^k = (p_{11}^k, p_{12}^k, ...)$ e descrisă tot printr-o formulă:
$S_f(\bar{v}^k) = p_{11}^k \wedge p_{22}^k \wedge ...$ (1 pe poz. 1, 2 pe poz. 2, ...)

• Stările succesive sunt legate prin mutări (*relația de tranziție*):

$$\boxed{S_i(\bar{v}^0) \wedge R(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \wedge R(\bar{v}^1, \bar{v}^2) \wedge \ldots \wedge R(\bar{v}^{k-1}, \bar{v}^k) \wedge S_f(\bar{v}^k)}$$

Există soluție în k mutări *dacă și numai dacă* formula e *realizabilă.*

Soluția problemei

Putem rezolva deci problema (și multe altele) exprimând-o ca o problemă de *logică propozițională*:

Descriem o *stare* ca formulă propozițională.
în particular, starea inițială S_i și cea țintă S_f

Descriem o *mutare* între stări ca formulă propozițională.
relația de tranziție $R(\bar{v}, \bar{v}')$ între doi vectori de stare

$\Rightarrow$ Găsim un *plan* de lungime minimă căutând succesiv soluții pentru formule tot mai complexe: 1, 2, 3, ... pași

$S_i(\bar{v}^0) \wedge R(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \wedge S_f(\bar{v}^1)$ 1 pas: $\bar{v}^0 \to \bar{v}^1$

$S_i(\bar{v}^0) \wedge R(\bar{v}^0, \bar{v}^1) \wedge R(\bar{v}^1, \bar{v}^2) \wedge S_f(\bar{v}^2)$ 2 pași: $\bar{v}^0 \to \bar{v}^1 \to \bar{v}^2$

etc.

În funcție de problemă, există și alți algoritmi, dedicați.
Aici am redus problema la o exprimare *simplă*, fundamentală:
determinarea realizabilității unei formule boolene (problema SAT)