Logică și structuri discrete

Mulțimi

Casandra Holotescu

casandra@cs.upt.ro

https://tinyurl.com/lecturesLSD

Mulțimi – aspecte teoretice

Ce sunt mulțimile?

Mulțimea e un concept matematic *fundamental*.

Definiție informală:

O *mulțime* e o *colecție* de obiecte numite *elementele* mulțimii.

Ce sunt mulțimile?

Mulțimea e un concept matematic *fundamental*.

Definiție informală:

O *mulțime* e o *colecție* de obiecte numite *elementele* mulțimii.

Două noțiuni distincte: *element* și *mulțime*

$x \in S$: elementul x *aparține* mulțimii S
$x \notin S$: elementul x *nu aparține* mulțimii S

Important:
Ordinea elementelor *nu* contează $\{1, 2, 3\} = \{1, 3, 2\}$
Un element *nu* apare de mai multe ori $\cancel{\{1, 2, 3, 2\}}$

Moduri de definire a unei mulțimi

1. Prin *enumerarea* elementelor:

   $A = \{a, b, c\}, \quad D = \{1, 2, 3, 6\}$ = mulțimea divizorilor lui 6

Elementele mulțimii se scriu între acolade, separate prin virgulă.

Moduri de definire a unei mulțimi

1. Prin *enumerarea* elementelor:

   $A = \{a, b, c\}, \quad D = \{1, 2, 3, 6\}$ = mulțimea divizorilor lui 6

Elementele mulțimii se scriu între acolade, separate prin virgulă.

2. Printr-o *proprietate* caracteristică

   $S = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P(x)\}$

$D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid n \mod d = 0\}$ (mulțimea divizorilor lui n)

Moduri de definire a unei mulțimi

1. Prin *enumerarea* elementelor:

   $A = \{a, b, c\}, \quad D = \{1, 2, 3, 6\} =$ mulțimea divizorilor lui 6

Elementele mulțimii se scriu între acolade, separate prin virgulă.

2. Printr-o *proprietate* caracteristică

   $S = \{x \mid x \text{ are proprietatea } P(x)\}$

$D(n) = \{d \in \mathbb{N} \mid n \mod d = 0\}$ (mulțimea divizorilor lui n)

3. *Inductiv* (vezi cursul 2)

Submulțimi

A e o *submulțime* a lui B: $A \subseteq B$
dacă fiecare element al lui A e și un element al lui B.

Submulțimi

A e o *submulțime* a lui B: $\quad A \subseteq B$
dacă fiecare element al lui A e și un element al lui B.

A e o *submulțime proprie* a lui B: $\quad A \subset B$
dacă $A \subseteq B$ și există (măcar) un element $x \in B$ astfel ca $x \notin A$.

Submulțimi

A e o *submulțime* a lui B: $A \subseteq B$
dacă fiecare element al lui A e și un element al lui B.

A e o *submulțime proprie* a lui B: $A \subset B$
dacă $A \subseteq B$ și există (măcar) un element $x \in B$ astfel ca $x \notin A$.

Obs. Ca să demonstrăm $A \not\subseteq B$ e suficient să găsim un element $x \in A$ pentru care $x \notin B$.

(Pentru a arăta ca o afirmație e falsă, ajunge un *contraexemplu*).

Submulțimi

A e o *submulțime proprie* a lui B: $\quad A \subset B$
dacă $A \subseteq B$ și există (măcar) un element $x \in B$ astfel ca $x \notin A$.

Atenție! $\in$ e o relație între un *element* și o mulțime.
$\subseteq$ și $\subset$ sunt relații între *două mulțimi*.

Submulțimi

A e o *submulțime proprie* a lui B: $A \subset B$
dacă $A \subseteq B$ și există (măcar) un element $x \in B$ astfel ca $x \notin A$.

Atenție! $\in$ e o relație între un *element* și o mulțime.
$\subseteq$ și $\subset$ sunt relații între *două mulțimi*.

Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci $A = B$ (mulțimile sunt egale)

Submulțimi

A e o *submulțime proprie* a lui B: $\quad A \subset B$

dacă $A \subseteq B$ și există (măcar) un element $x \in B$ astfel ca $x \notin A$.

Atenție! $\in$ e o relație între un *element* și o mulțime.

$\subseteq$ și $\subset$ sunt relații între *două mulțimi*.

Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci $A = B$ (mulțimile sunt egale)

dacă A e definită prin proprietatea $P_A(x)$ și B prin $P_B(x)$

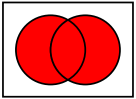
demonstrăm $A = B$ arătând

$A \subseteq B$: $\quad P_A(x) \Rightarrow P_B(x)$ și

$B \subseteq A$: $\quad P_B(x) \Rightarrow P_A(x)$

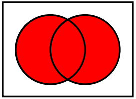
Operații de bază

Reuniunea a două mulțimi:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

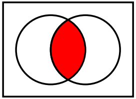


Operații de bază

Reuniunea a două mulțimi:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$

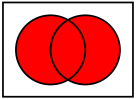


Intersecția a două mulțimi:
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$

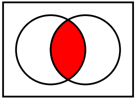


Operații de bază

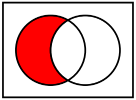
Reuniunea a două mulțimi:
$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$



Intersecția a două mulțimi:
$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \in B\}$



Diferența a două mulțimi:
$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ și } x \notin B\}$

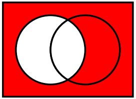


Figurile: *diagrame Venn* https://en.wikipedia.org/wiki/Venn_diagram

Operații de bază

Uzual, discutăm într-un *context*: avem un *univers* (de discurs) U al **tuturor elementelor** la care ne-am putea referi.

Complementul unei mulțimi (față de universul U):
$A^c = \{x \in U \mid x \notin A\} = U \setminus A$ (notat și $\overline{A}$)



Figurile: *diagrame Venn* `https://en.wikipedia.org/wiki/Venn_diagram`

Generalizarea reuniunii și intersecției

Dacă $\mathcal{A}$ e o colecție de mulțimi, definim reuniunea a n mulțimi:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A_i \text{ cu } A_i \in \mathcal{A}\}$$

$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n$ (n finit)

și reuniune infinită de mulțimi: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

Generalizarea reuniunii și intersecției

Dacă $\mathcal{A}$ e o colecție de mulțimi, definim reuniunea a n mulțimi:

$$\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A_i \text{ cu } A_i \in \mathcal{A}\}$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n \ (n \text{ finit})$$

și reuniune infinită de mulțimi: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$

Intersecția a n mulțimi:

$$\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A = \{x \mid x \in A_i, \forall A_i \in \mathcal{A}\}$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n \ (n \text{ finit})$$

și intersecție infinită de mulțimi: $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i = A_0 \cap \ldots \cap A_n \cup \ldots$

Algebra Booleană a mulțimilor

Noțiune datorată matematicianului George Boole (sec. 19)
Operațiile unei algebre Boolene (aici $\cup$ și $\cap$) satisfac legile:

Comutativitate: $A \cup B = B \cup A \qquad A \cap B = B \cap A$

Asociativitate: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ și
$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributivitate: $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ și
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Identitate: există două valori (aici $\emptyset$ și universul U) astfel ca:
$A \cup \emptyset = A \qquad A \cap U = A$

Complement: orice A are un complement A^c (sau $\overline{A}$) astfel ca:
$A \cup A^c = U \qquad A \cap A^c = \emptyset$

Algebra Booleană a mulțimilor (cont.)

Alte proprietăți (pot fi deduse din cele de mai sus):

Idempotență: $A \cup A = A \qquad A \cap A = A$

Absorbție: $A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$

Dublu complement: $(A^c)^c = A$

Complementele elementelor identitate: $\emptyset^c = U \qquad U^c = \emptyset$

Limită universală: $A \cup U = U \qquad A \cap \emptyset = \emptyset$

Legile lui de Morgan:

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c \qquad (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

Partiție a unei mulțimi

O *partiție* a unei mulțimi A e o **colecție de mulțimi** $P_1, P_2, \ldots$ astfel încât:

- mulțimile $P_1, P_2, \ldots$ sunt **nevide** și **mutual disjuncte**, adică $P_i \cap P_j = \emptyset$, pentru orice $i \neq j$
- A e reuniunea tuturor mulțimilor P_i: $\quad A = \bigcup_i P_i$

Cardinalul unei mulțimi

Cardinalul (cardinalitatea) unei mulțimi A e numărul de elemente al mulțimii. Îl notăm $|A|$.

Putem avea mulțimi *finite* sau *infinite*

Dacă A e o mulțime *finită* și $P_1, \ldots, P_N$ o partiție a ei, atunci

$$|A| = |P_1| + \ldots + |P_n|$$

Cardinalul reuniunii / intersecției / diferenței

Legea reuniunii (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Legea diferenței (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Cardinalul reuniunii / intersecției / diferenței

Legea reuniunii (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Legea diferenței (pt. mulțimi *finite*):

$$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$$

Putem demonstra considerând cele 2x2 cazuri posibile:
$A \cap B$, $A \cap B^c$, $A^c \cap B$ și $A^c \cap B^c$ formează o *partiție* a universului

$A = (A \cap B) \cup (A \cap B^c)$ (partiție) $\Rightarrow |A| = |A \cap B| + |A \cap B^c|$

La fel, $\quad |B| = |A \cap B| + |A^c \cap B|$

și $\quad |A \cup B| = |A \cap B| + |A \cap B^c| + |A^c \cap B|$

de unde, combinând, rezultă egalitățile de mai sus.

Principiul includerii și excluderii

pentru mulțimi *finite*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Mai general,

$$|\bigcup_{i=1}^{n} A_i| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap \ldots A_n|$$

Demonstrație: prin inducție după n

Tupluri

Un *n-tuplu* e un șir de n elemente $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$

Proprietăți:
elementele nu sunt neapărat distincte
ordinea elementelor în tuplu contează

Cazuri particulare:
pereche (a, b),
triplet (x, y, z), etc.

Produs cartezian

Produsul cartezian a două mulțimi e mulțimea perechilor

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

Exemplu: mulțimea numerelor complexe poate fi văzută ca produs cartezian $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (putem găsi o *bijecție* între ele)

Produsul cartezian a n mulțimi e mulțimea $n - tuplelor$

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A_i, 1 \leq i \leq n\}$$

Dacă mulțimile sunt finite, atunci

$$|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \cdot \ldots \cdot |A_n|$$

Mulțimea submulțimilor

Mulțimea submulțimilor (engl. *power set*) a unei mulțimi S, notată $\mathcal{P}(S)$ (uneori 2^S):

$$\mathcal{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$$

Exemplu, pentru $S = \{a, b, c\}$, avem
$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Mulțimea submulțimilor

Mulțimea submulțimilor (engl. *power set*) a unei mulțimi S, notată $\mathcal{P}(S)$ (uneori 2^S):

$$\mathcal{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}$$

Exemplu, pentru $S = \{a, b, c\}$, avem
$\mathcal{P}(S) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$

Dacă S e finită, atunci $|\mathcal{P}(S)| = 2^{|S|}$

Există o bijecție între $\mathcal{P}(S)$ și mulțimea funcțiilor $f : S \to \{0, 1\}$
  dacă $f(x) = 1$, x aparține submulțimii, altfel nu.
  numărul funcțiilor e $|\{0, 1\}|^{|S|} = 2^{|S|}$

Mulțimi – numărabile & nenumărabile

Mulțimi numărabile și nenumărabile

Informal: o mulțime e *numărabilă* dacă îi putem lista elementele
$\Leftrightarrow$ dacă putem asocia fiecărui element un număr (natural, diferit).

Mulțimi numărabile și nenumărabile

Informal: o mulțime e *numărabilă* dacă îi putem lista elementele
$\Leftrightarrow$ dacă putem asocia fiecărui element un număr (natural, diferit).

O mulțime S e *numărabilă* dacă are cardinalul egal cu cardinalul unei submulțimi a numerelor naturale (deci $|S| \leq |\mathbb{N}|$).

Mulțimi numărabile și nenumărabile

Informal: o mulțime e *numărabilă* dacă îi putem lista elementele
$\Leftrightarrow$ dacă putem asocia fiecărui element un număr (natural, diferit).

O mulțime S e *numărabilă* dacă are cardinalul egal cu cardinalul unei submulțimi a numerelor naturale (deci $|S| \leq |\mathbb{N}|$).

O mulțime S e *numărabilă* dacă
  există o funcție injectivă $f : S \to \mathbb{N}$
  sau o funcție surjectivă $g : \mathbb{N} \to S$
și deci $|S| \leq |\mathbb{N}|$

Mulțimi numărabile

Orice mulțime finită e numărabilă:

$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$

(indicii reprezintă corespondența cu $\{1, 2, ...n\}$)

Mulțimi numărabile

Orice mulțime finită e numărabilă:

$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$

(indicii reprezintă corespondența cu $\{1, 2, ...n\}$)

Dar nu orice mulțime numărabilă e finită

$\mathbb{N}$ e numărabilă: în definiție, luăm f funcția identitate

$\mathbb{Z}$ e numărabilă: putem enumera: $0, -1, 1, -2, 2, ...$

$f(x) = 2x$, pentru $x \geq 0$,

$f(x) = -2x - 1$ pentru $x < 0$

Mulțimi numărabile

Orice mulțime finită e numărabilă:

$|A| = n \Rightarrow A = \{a_1, a_2, ...a_n\}$

(indicii reprezintă corespondența cu $\{1, 2, ...n\}$)

Dar nu orice mulțime numărabilă e finită

$\mathbb{N}$ e numărabilă: în definiție, luăm f funcția identitate

$\mathbb{Z}$ e numărabilă: putem enumera: $0, -1, 1, -2, 2, ...$

$f(x) = 2x$, pentru $x \geq 0$,

$f(x) = -2x - 1$ pentru $x < 0$

Definiție echivalentă: S e numărabilă dacă e fie finită, fie există o bijecție între S și $\mathbb{N}$ (e *infinit numărabilă*, $|S| = |\mathbb{N}|$).

Numerele raționale sunt numărabile

1/1	1/2	1/3	1/4	...
2/1	2/2	2/3	2/4	...
3/1	3/2	3/3	3/4	...
...	...	...	...	...

NU putem ~~număra elementele pe linii~~: deja prima linie e *infinită*, nu ajungem niciodată la a doua!

Enumerăm pe *diagonale*
(după valoare crescătoare a lui $m + n$, numărător + numitor):
1/1,   1/2, 2/1,   1/3, 2/2, 3/1,   1/4, 2/3, 3/2, 4/1, ...

$\Rightarrow$ fiecare element va fi numărat

Numerele raționale sunt numărabile

1/1	1/2	1/3	1/4	...
2/1	2/2	2/3	2/4	...
3/1	3/2	3/3	3/4	...
...	...	...	...	...

NU putem ~~număra elementele pe linii~~: deja prima linie e *infinită*, nu ajungem niciodată la a doua!

Enumerăm pe *diagonale*
(după valoare crescătoare a lui $m + n$, numărător + numitor):
1/1,   1/2, 2/1,   1/3, 2/2, 3/1,   1/4, 2/3, 3/2, 4/1, ...
$\Rightarrow$ fiecare element va fi numărat

Tehnică generală:
asociem fiecărui element o *mărime*: aici m+n; lungimea la șiruri; etc
așa încât cu fiecare mărime să avem un număr *finit* de elemente
numărăm după mărime crescătoare $\Rightarrow$ ajungem la fiecare element

Construcții cu mulțimi numărabile

O mulțime e numărabilă dacă putem *enumera* elementele într-un șir:

Un șir e o funcție de la $\mathbb{N}$ la mulțimea elementelor șirului
(sau de la $\{1, 2, \ldots n\}$ la elementele șirului, pentru un șir finit)

Construcții cu mulțimi numărabile

O mulțime e numărabilă dacă putem *enumera* elementele într-un șir:

Un șir e o funcție de la $\mathbb{N}$ la mulțimea elementelor șirului
(sau de la $\{1, 2, \ldots n\}$ la elementele șirului, pentru un șir finit)

Reuniunea a două mulțimi *numărabile* e *numărabilă*.

Enumerăm *alternativ* mulțimile (similar cu cazul lui $\mathbb{Z}$):

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$,
$B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$ (le putem enumera)

$\Rightarrow$ formăm șirul $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, \ldots$
(putem avea duplicate, oricum am enumerat toate elementele)

Prin inducție, reuniunea a n mulțimi *numărabile* e *numărabilă*.

Construcții cu mulțimi numărabile

Produsul cartezian $A \times B$ a două mulțimi *numărabile* e *numărabil*

Folosim aceeași construcție ca la numerele raționale:

$$\begin{array}{lllll}
(a_1, b_1) & (a_1, b_2) & (a_1, b_3) & (a_1, b_4) & \ldots \\
(a_2, b_1) & (a_2, b_2) & (a_2, b_3) & (a_2, b_4) & \ldots \\
(a_3, b_1) & (a_3, b_2) & (a_3, b_3) & (a_3, b_4) & \ldots \\
\ \ \ldots & \ \ \ldots & \ \ \ldots & \ \ \ldots\ \ldots &
\end{array}$$

enumerăm perechile în ordine crescătoare a sumei indicilor:
$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), (a_1, b_3), (a_2, b_2), (a_3, b_1), \ldots\}$

Prin inducție, produsul cartezian a n mulțimi *numărabile* e *numărabil*.

Realii sunt nenumărabili

Construcția diagonală a lui Cantor:

Reprezentăm numerele subunitare în baza 2: cifrele sunt 0 și 1
$0.01101... = 0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \ldots$

Presupunem prin absurd că realii din [0, 1) ar fi numărabili
$\Rightarrow$ enumerăm realii subunitari pe rânduri, după numărul de ordine

$$
\begin{array}{llllll}
r_1 = 0. & d_{11} & d_{12} & d_{13} & \ldots & 0.1011101... \\
r_2 = 0. & d_{21} & d_{22} & d_{23} & \ldots & 0.0110010... \\
r_3 = 0. & d_{31} & d_{32} & d_{33} & \ldots & 0.1101101... \\
\ldots & \ldots & \ldots & & &
\end{array}
$$

Realii sunt nenumărabili

Construcția diagonală a lui Cantor:

Reprezentăm numerele subunitare în baza 2: cifrele sunt 0 și 1
$0.01101... = 0 + 0 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 0 \cdot 2^{-4} + 1 \cdot 2^{-5} + \ldots$

Presupunem prin absurd că realii din [0, 1) ar fi numărabili
⇒ enumerăm realii subunitari pe rânduri, după numărul de ordine

$$\begin{array}{lllll}
r_1 = 0. & d_{11} & d_{12} & d_{13} & \ldots \qquad 0.1011101... \\
r_2 = 0. & d_{21} & d_{22} & d_{23} & \ldots \qquad 0.0110010... \\
r_3 = 0. & d_{31} & d_{32} & d_{33} & \ldots \qquad 0.1101101... \\
\quad \ldots & \ldots & \ldots & &
\end{array}$$

Construim un număr real $\mathbf{x} = 0.d_1 d_2 d_3 \ldots$ cu următoarele cifre:
$d_i = 1 - d_{ii}$ (urmărind diagonala matricii, schimbăm $0 \leftrightarrow 1$)

Dar **x** diferă de toate numerele din tabel (diferă de r_i la poziția i)!

⇒ $[0, 1)$ nenumărabilă; $[0, 1) \subset \mathbb{R}$ deci $\mathbb{R}$ *e nenumărabilă !*

Limitele calculabilității

Mulțimea programelor care pot fi scrise e *numărabilă*:

alfabetul Σ al unui limbaj de programare e finit

programele au lungime finită (1, 2, 3, ... simboluri)

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$ e o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile (chiar finite) $\Rightarrow$ e numărabilă

Limitele calculabilității

Mulțimea programelor care pot fi scrise e *numărabilă*:

alfabetul Σ al unui limbaj de programare e finit

programele au lungime finită (1, 2, 3, ... simboluri)

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$ e o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile (chiar finite) $\Rightarrow$ e numărabilă

Putem *calcula* orice număr real? în sensul de a scrie un program, care îl tipărește, cifră cu cifră, eventual rulând la infinit.

Limitele calculabilității

Mulțimea programelor care pot fi scrise e *numărabilă*:

alfabetul Σ al unui limbaj de programare e finit

programele au lungime finită (1, 2, 3, ... simboluri)

$\Sigma \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \ldots$ e o reuniune numărabilă de mulțimi numărabile (chiar finite) $\Rightarrow$ e numărabilă

Putem *calcula* orice număr real? în sensul de a scrie un program, care îl tipărește, cifră cu cifră, eventual rulând la infinit.

NU, pentru că programele sunt numărabile, dar $\mathbb{R}$ e *nenumărabilă* !
$\Rightarrow$ se pot formula mai multe probleme decât pot fi rezolvate!

Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime S, $|S| < |\mathcal{P}(S)|$.

sau, echivalent: *Nu există bijecție* de la S la $\mathcal{P}(S)$.

Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime S, $|S| < |\mathcal{P}(S)|$.

sau, echivalent: *Nu există bijecție* de la S la $\mathcal{P}(S)$.

Să presupunem că ar exista o bijecție $f : S \to \mathcal{P}(S)$.
Formăm mulțimea:

$$Y = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$$

Cum $Y \in \mathcal{P}(S)$, și f e bijecție, există $y \in S$ cu $f(y) = Y$.

Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime S, $|S| < |\mathcal{P}(S)|$.

sau, echivalent: *Nu există bijecție* de la S la $\mathcal{P}(S)$.

Să presupunem că ar exista o bijecție $f : S \to \mathcal{P}(S)$.
Formăm mulțimea:

$$Y = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$$

Cum $Y \in \mathcal{P}(S)$, și f e bijecție, există $y \in S$ cu $f(y) = Y$.

Dacă $y \in Y$, cum $Y = f(y)$ atunci $y \in f(y)$, și nu respectă condiția de construcție a lui Y, deci $y \notin Y \Rightarrow$ contradicție.

Dacă $y \notin Y$, atunci $y \notin f(y)$ și satisface condiția pentru Y, deci $y \in Y \Rightarrow$ contradicție.

Teorema lui Cantor

Teorema lui Cantor: Pentru orice mulțime S, $|S| < |\mathcal{P}(S)|$.

sau, echivalent: *Nu există bijecție* de la S la $\mathcal{P}(S)$.

Să presupunem că ar exista o bijecție $f : S \to \mathcal{P}(S)$.
Formăm mulțimea:

$$Y = \{x \in S \mid x \notin f(x)\}$$

Cum $Y \in \mathcal{P}(S)$, și f e bijecție, există $y \in S$ cu $f(y) = Y$.

Dacă $y \in Y$, cum $Y = f(y)$ atunci $y \in f(y)$, și nu respectă condiția de construcție a lui Y, deci $y \notin Y \Rightarrow$ contradicție.

Dacă $y \notin Y$, atunci $y \notin f(y)$ și satisface condiția pentru Y, deci $y \in Y \Rightarrow$ contradicție.

Deci presupunerea e falsă, nu poate exista o bijecție.

$\Rightarrow |S| < |\mathcal{P}(S)|$

Există oricâte infinituri

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (deci $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este numărabilă)

$|\mathbb{N}|$, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$, ... sunt cardinalități infinite tot mai mari!

Există oricâte infinituri

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (deci $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este numărabilă)

$|\mathbb{N}|$, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$, $\ldots$ sunt cardinalități infinite tot mai mari!

Există o bijecție între $\mathcal{P}(S)$ și mulțimea funcțiilor $f : S \to \{0, 1\}$,
iar numărul funcțiilor e $|\{0, 1\}|^{|S|} = 2^{|S|}$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$

Există oricâte infinituri

$|\mathbb{N}| < |\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ (deci $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nu este numărabilă)

$|\mathbb{N}|$, $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$, $|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))|$, ... sunt cardinalități infinite tot mai mari!

Există o bijecție între $\mathcal{P}(S)$ și mulțimea funcțiilor $f : S \to \{0, 1\}$, iar numărul funcțiilor e $|\{0, 1\}|^{|S|} = 2^{|S|}$

$\Rightarrow |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|}$

$|\mathbb{N}| = \aleph_0$ ("aleph-zero" sau "aleph-null")

$\aleph_0$ – cel mai mic cardinal infinit

$|\mathcal{P}(\mathbb{N})| = 2^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$

$|\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))| = 2^{|\mathcal{P}(\mathbb{N})|} = 2^{2^{\aleph_0}} > 2^{\aleph_0}$

...

Este demonstrat și că $|\mathbb{R}| = 2^{\aleph_0}$

Mulțimi în ML

Funcția caracteristică: mulțimi și funcții boolene

Dacă fixăm universul U al elementelor, putem reprezenta orice mulțime $S \subseteq U$ prin *funcția caracteristică*

$f_S : U \to \mathbb{B}$:
$f_S(x) = \mathit{true}$ dacă $x \in S$, și *false* altfel (dacă $x \notin S$)

Un limbaj funcțional poate reprezenta *date* (mulțimi) prin *funcții*

Funcția caracteristică: mulțimi și funcții boolene

Dacă fixăm universul U al elementelor, putem reprezenta orice mulțime $S \subseteq U$ prin *funcția caracteristică*

$f_S : U \to \mathbb{B}$:
$f_S(x) = \mathit{true}$ dacă $x \in S$, și *false* altfel (dacă $x \notin S$)

Un limbaj funcțional poate reprezenta *date* (mulțimi) prin *funcții*

Pornim de la mulțimea cu un singur element, a

```
let singleton a = fun x -> x = a (*adev. doar pt. a *)
```

`singleton a` are tipul `'a -> bool`: *mulțimea e o funcție*

testul de element e *aplicarea funcției* la element: `m x`

```
let empty = fun _ -> false (*functie constanta *)
```

Funcția caracteristică. Operațiile pe mulțimi

```
let singleton a = fun x -> x = a
```

mulțimea e o funcție

testul de element e *aplicarea funcției* la element: `m x`

```
let empty = fun _ -> false
```

Funcția caracteristică. Operațiile pe mulțimi

```
let singleton a = fun x -> x = a
```

mulțimea e o funcție

testul de element e *aplicarea funcției* la element: `m x`

```
let empty = fun _ -> false
```

Operațiile pe mulțimi corespund direct la *operatorii booleni*

```
let add a m = fun x -> x = a || m x (*adauga elem *)
let union m1 m2 = fun x -> m1 x || m2 x
let inter m1 m2 = fun x -> m1 x && m2 x
let diff m1 m2 = fun x -> m1 x && not (m2 x)
```

Mulțimi în ML: modulul Set

Nu există sintaxă specială ~~{ 1, 2 }~~ ~~{ "ana","bob","cora" }~~

Întâi instanțiem un *modul* pentru lucru cu mulțimi (ex. de șiruri)

```
module S = Set.Make(String)
(* String: un modul standard *)

(* S are tipuri + functii standard, particularizate pt siruri

   val mem : elt -> t -> bool
             elt = tip element: string

   val cardinal : t -> int
                  t = tip multime de string

   val elements : t -> elt list
   ...
   si multe alte functii *)
```

Mulțimi în ML: modulul Set

```
let s0 = S.add "cora" (S.add "bob" (S.add "ana" S.empty))

let s1 = S.singleton "ana" |> S.add "bob" |> S.add "cora"

let s2 = S.of_list ["ana"; "are"; "mere" ]
(*creeaza multime din lista*)
```

`x |> f` înseamnă `f x`   (util la compunere fără paranteze)

Funcțiile pe mulțimi *creează mulțimi noi*, nu ~~modifică~~ argumentele!

Mulțimi în ML: modulul Set

OCaml necesită o funcție de *comparare* pe elementele unei mulțimi.
$\Rightarrow$ trebuie un *modul* definind tipul element și funcția de comparare

```
(* trebuie definit un modul pentru intregi *)
module Int = struct
  type t = int
  let compare = compare
  (*Pervasives.compare, bun pt.orice tip*)
end
(* Char, String: similare, dar predefinite *)

module IS = Set.Make(Int)
(* IS: un modul Set particularizat pt Int *)
```

Parcurgerea mulțimilor

Mulțimile nu au un element special (cum e capul listei)
pentru obținerea unui element *oarecare* există
`choose : t -> elt`

⇒ e important să folosim **funcțiile de parcurgere**

```
val iter : (elt -> unit) -> t -> unit
val filter : (elt -> bool) -> t -> t
val fold : (elt -> 'a -> 'a) -> t -> 'a -> 'a
```

Ordinea parametrilor la `fold` e ca la `List.fold_right`:

```
f (elem, rez-partial)   multime   val-init-rez
```

Parcurgerea mulțimilor

Putem defini de exemplu `union` folosind `fold`

```
let union s1 s2 = S.fold (fun e s -> S.add e s) s1 s2
(* parcurge s1, adauga fiecare element, val.init. e s2 *)

let union = S.fold S.add
(* f x y = g x y => f = g *)
```

Funcțiile pe mulțimi *creează mulțimi noi*, nu ~~modifică~~ argumentele!
(la fel ca toate funcțiile studiate)

Mulțimi: formalizare și paradoxuri

Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Exemplu: o *pereche* (ordonată!) poate fi definită ca:
$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (Kazimierz Kuratowski, 1921)

Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Exemplu: o *pereche* (ordonată!) poate fi definită ca:
$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (Kazimierz Kuratowski, 1921)

Numerele naturale au fost formalizate de Giuseppe Peano (1889):
0 e un număr natural
dacă n e un număr natural, $S(n)$ e un număr natural
(funcția succesor S e injectivă, și $S(n) \neq 0$ pentru orice n)

Putem defini folosind mulțimi: $0 \stackrel{def}{=} \emptyset$ $\quad S(n) \stackrel{def}{=} n \cup \{n\}$

Mulțimile, fundament al matematicii

Georg Cantor (1874): teoria *naivă* a mulțimilor

Practic toată matematica poate fi formalizată în teoria mulțimilor (sau în logică, de care e strâns legată, după cum vom vedea).

Exemplu: o *pereche* (ordonată!) poate fi definită ca:
$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ (Kazimierz Kuratowski, 1921)

Numerele naturale au fost formalizate de Giuseppe Peano (1889):
0 e un număr natural
dacă n e un număr natural, $S(n)$ e un număr natural
(funcția succesor S e injectivă, și $S(n) \neq 0$ pentru orice n)

Putem defini folosind mulțimi: $0 \stackrel{def}{=} \emptyset \quad S(n) \stackrel{def}{=} n \cup \{n\}$

Însă, pornind de la definiții *imprecise*, în limbaj natural, în teoria naivă a mulțimilor apar *paradoxuri*.

Paradoxul lui Russell

Fie R mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele:
$R = \{X \mid X \notin X\}$. *Mulțimea R se conține pe ea însăși*?
dacă $R \in R$, pentru a satisface condiția de definiție, $R \notin R$.
dacă $R \notin R$, atunci R satisface condiția, deci $R \in R$: paradox!

O formulare intuitivă (paradoxul bărbierului):

Bărbierul bărbierește exact oamenii care nu se bărbieresc singuri.
Bărbierul se bărbierește pe el însuși sau nu ?

Paradoxul lui Russell

Fie R mulțimea tuturor mulțimilor care nu se conțin pe ele însele:
$R = \{X \mid X \notin X\}$. *Mulțimea R se conține pe ea însăși*?
dacă $R \in R$, pentru a satisface condiția de definiție, $R \notin R$.
dacă $R \notin R$, atunci R satisface condiția, deci $R \in R$: paradox!

O formulare intuitivă (paradoxul bărbierului):

Bărbierul bărbierește exact oamenii care nu se bărbieresc singuri.
Bărbierul se bărbierește pe el însuși sau nu ?

Motivul: în teoria naivă a mulțimilor, orice proprietate (predicat) $P(x)$ poate defini o mulțime:

$\exists y \forall x (x \in y \Leftrightarrow P(x))$ $\quad$ x e în y dacă și numai dacă P(x)

Căutăm să obținem o echivalență între o propoziție și negația ei:
alegem $P(x) : x \notin x$ și luăm $x = y$ (în $\forall x$... putem alege orice x).
Obținem $y \in y \Leftrightarrow y \notin y$, paradox.

Paradoxul lui Russell (cont.)

Poate fi *evitat* în mai multe feluri, impunând *restricții* asupra modului în care se poate defini o mulțime.

de ex.: Nu putem defini o mulțime doar printr-o proprietate $P(x)$, trebuie să *specificăm universul* din care își poate lua elementele:

$$R = \{X \mid X \subseteq U \text{ și } X \notin X\}$$

Dacă presupunem $R \in R$, din proprietatea care definește mulțimea, rezultă $R \notin R$
(nu e un paradox, înseamnă doar că presupunerea a fost falsă).

Dacă $R \notin R$, rezultă doar că nu putem avea $R \subseteq U$ *și* $R \notin R$.

Rezultă că $\neg(R \subseteq U)$, deci R nu e o mulțime (valid definită) în universul considerat.

Teoria axiomatică a mulțimilor

O *axiomă* e o propoziție presupusă adevărată.
E un punct de plecare pentru un raționament.

Sistemele axiomatice au fost dezvoltate pentru a evita paradoxurile din *teoria naivă* a mulțimilor (cu noțiuni definite în limbaj natural)

Teoria axiomatică a mulțimilor

O *axiomă* e o propoziție presupusă adevărată.
E un punct de plecare pentru un raționament.

Sistemele axiomatice au fost dezvoltate pentru a evita paradoxurile din *teoria naivă* a mulțimilor (cu noțiuni definite în limbaj natural)

Cel mai răspândit: sistemul *Zermelo-Fraenkel* (1907..1930).
Câteva axiome:

Axioma extensionalității:
Două mulțimi sunt egale dacă și numai dacă au aceleași elemente (dacă fiecare element al lui A e și un element al lui B, și reciproc)

$$\forall A \forall B (A = B \Leftrightarrow \forall C (C \in A \Leftrightarrow C \in B))$$

Axioma mulțimii vide (existență):
Există o mulțime care nu are niciun element

$$\exists E \forall X \neg (X \in E)$$

...

Axiome ale teoriei mulțimilor (cont.)

Axioma regularității (a fundației)
Orice mulțime nevidă are un element $x \in A$ disjunct de ea: $x \cap A = \emptyset$

$$\forall X(X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y(Y \in X \land \neg\exists Z(Z \in X \land Z \in Y))$$

Axiome ale teoriei mulțimilor (cont.)

Axioma regularității (a fundației)
Orice mulțime nevidă are un element $x \in A$ disjunct de ea: $x \cap A = \emptyset$

$$\forall X(X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y(Y \in X \wedge \neg \exists Z(Z \in X \wedge Z \in Y))$$

Rezultă că nu există un șir infinit $A_0, A_1, \ldots A_n \ldots$ astfel încăt

$$A_0 \ni A_1 \ni \ldots \ni A_n \ni \ldots$$

(altfel $\{A_0, A_1, \ldots\}$ ar fi o astfel de mulțime)

Rezultă că nicio mulțime nu se poate avea ca element, $X \notin X$, altfel $X \ni X \ni X$... ar fi un astfel de șir

Axiome ale teoriei mulțimilor (cont.)

Axioma regularității (a fundației)
Orice mulțime nevidă are un element $x \in A$ disjunct de ea: $x \cap A = \emptyset$

$$\forall X (X \neq \emptyset) \Rightarrow \exists Y (Y \in X \wedge \neg \exists Z (Z \in X \wedge Z \in Y))$$

Rezultă că nu există un șir infinit $A_0, A_1, \ldots A_n \ldots$ astfel încât

$$A_0 \ni A_1 \ni \ldots \ni A_n \ni \ldots$$

(altfel $\{A_0, A_1, \ldots\}$ ar fi o astfel de mulțime)

Rezultă că nicio mulțime nu se poate avea ca element, $X \notin X$, altfel $X \ni X \ni X$... ar fi un astfel de șir

Intuitiv: orice mulțime e formată din elemente (posibil mulțimi) mai simple, care la rândul lor conțin elemente mai simple, până ajungem la elemente fundamentale

$\Rightarrow$ elimină paradoxul lui Russell