Logică și structuri discrete

Gramatici

Casandra Holotescu

casandra@cs.upt.ro

`https://tinyurl.com/lecturesLSD`

Recapitulare: Automate

Automatele pot descrie comportamentul unui sistem simplu.
din fiecare stare s, intrarea σ determină starea următoare s'

Un automat *recunoaște* un limbaj (face parte șirul din limbaj?)
ex. program cu comentarii încheiate corect

Traductoare: automate care produc ieșiri (în funcție de intrare)
putem *prelucra* limbaje (ex. elimina comentarii)

Automatele se pot reprezenta *eficient*:
tabel de tranziții:

st	a	b	c
0	1	0	0
1	1	2	0
2	1	0	3
$\boxed{3}$	1	0	0

⇒ putem determina eficient dacă un șir e acceptat
parcurgem șirul, la fiecare pas tabelul ne dă starea următoare

Recapitulare: Expresii regulate

Expresiile regulate reprezintă concis *limbaje regulate*, ca automatele

Sunt mai ușor de compus (din concatenare, alternativă, repetiție)

Putem să căutăm *tipare* în text, de exemplu identificăm:

șir nevid de cifre: `[0-9]+`

`"images/d61_2016-07-06/logo-57x60.png" sizes="32x32"`

sau o dimensiune (de imagine): `[0-9]+x[0-9]+`

`"images/d61_2016-07-06/logo-57x60.png" sizes="32x32"`

Pentru căutări, expresiile regulate se traduc în automate
(mai eficient de lucrat)

Limbaje formale, în general

Dorim să:

descriem un limbaj (cât mai simplu/clar/concis)

recunoaștem dacă un șir aparține unui limbaj,

generăm șiruri dintr-un limbaj

sau să *transformăm* astfel de șiruri

Limbaje care nu sunt regulate

Există limbaje foarte simple care nu sunt regulate:

$\{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ paranteze echilibrate, ((()))

$\{ww \mid w \in \{a, b\}^*\}$ cuvânt, apoi repetat

$\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ cuvânt, apoi inversat (palindrom)

Automatele finite au *memorie finită*
număr finit de stări ⇒ nu pot *număra* mai mult de atât

Pentru primul caz, ar trebui să *numărăm* n de a, cu n nelimitat

În cazul 2 și 3, ar trebui să memorăm cuvinte de lungime arbitrară ca să le comparăm ulterior.

Exemplu: $a^n b^n$ nu e limbaj regulat

$a^n b^n$: *numărăm* câți a apar, verificăm că sunt la fel de mulți b.

Demonstrăm prin *reducere la absurd*.

Fie un automat determinist cu *n stări* care acceptă limbajul.
Fie șirul $a^n b^n$ (cu același n) și stările $s_0 \xrightarrow{a} s_1 \xrightarrow{a} \ldots \xrightarrow{a} s_n$.
mai departe, din s_n automatul acceptă b^n.

Din $n+1$ stări $s_0 \ldots s_n$, doar n pot fi diferite: există $i < j$ cu $s_i = s_j$
(șirul de stări are un *ciclu* pe parcurs)

Atunci $s_i \underbrace{\xrightarrow{a} \ldots \xrightarrow{a}}_{j-i \text{ simboluri } a} s_j$ e un ciclu ($s_j = s_i$). Îl repetăm încă o dată:
mai adăugăm $j-i$ de a

Continuând apoi din s_j ajungem tot în s_n, dar am consumat a^{n+j-i}
$\Rightarrow$ automatul acceptă $a^{n+j-i} b^n$ (mai mulți a decât b), *contradicție*.

Lema de pompare pt. limbaje regulate (*pumping lemma*)

Exemplul anterior e un caz particular al unei proprietăți generale

Lema de pompare (informal): În orice limbaj regulat
orice cuvânt suficient de lung conține un subșir ce poate fi repetat

Fie L un *limbaj regulat*. Notăm cu $|w|$ lungimea cuvântului $w \in L$.

Lema de pompare

$\exists p \in \mathbb{N}$ astfel ca orice cuvânt $w \in L$ cu $|w| \geq p$ (destul de lung)
are forma $w = xyz$ cu

$|y| \geq 1$ se repetă un subșir nevid

$|xy| \leq p$ subșirul apare înainte de limita p

$\forall k \geq 0 \,.\, xy^k z \in L$ y poate fi repetat arbitrar între x și z

Demonstrația lemei de pompare

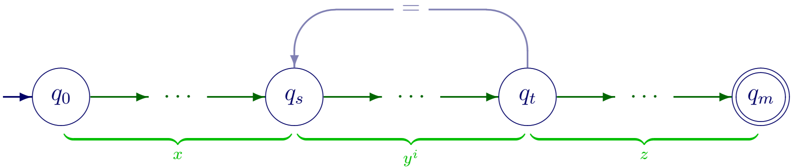
Fie un limbaj regulat și automatul care-l recunoaște.

Alegem *lungimea de pompare* $p =$ numărul de stări din automat.

Fie șirul $a_1 a_2 \ldots a_m$ cu $m \geq p$, și stările parcurse de automat:

$$q_0 \xrightarrow{a_1} q_1 \xrightarrow{a_2} q_2 \ldots \xrightarrow{a_s} q_s \xrightarrow{a_{s+1}} q_{s+1} \ldots \xrightarrow{a_t} q_t \ldots \xrightarrow{a_m} q_m$$

Avem $m + 1 > p$ stări, deci cel puțin o stare *se repetă* (ciclu):
$q_s = q_t$ cu $s, t \leq m$



https://en.wikipedia.org/wiki/Pumping_lemma_for_regular_languages

Parcurgând șirul $\mathbf{y} = \mathbf{a_{s+1} \ldots a_t}$ din q_s ajungem *înapoi* în $q_t = q_s$
deci putem *repeta* șirul y, și $xy^i z$ e în limbajul acceptat, q.e.d.

Limbajele de programare trebuie descrise precis

Expresiile regulate nu ajung pentru a descrie limbaje (chiar uzuale).

Din standardul C:

(6.8.4) *selection-statement:*

if **(** *expression* **)** *statement*
if **(** *expression* **)** *statement* **else** *statement*
switch **(** *expression* **)** *statement*

(6.8.5) *iteration-statement:*

while **(** *expression* **)** *statement*
do *statement* **while** **(** *expression* **)** **;**
for **(** $expression_{opt}$ **;** $expression_{opt}$ **;** $expression_{opt}$ **)** *statement*
for **(** *declaration* $expression_{opt}$ **;** $expression_{opt}$ **)** *statement*

Sintaxa limbajelor de programare e descrisă prin *gramatici*.

Gramatica limbajului natural

Exemplu: propoziții în limba engleză (mult simplificat)

A good student   reads books.

$S \rightarrow NP\ VP$	noun phrase + verb phrase
$NP \rightarrow subst$	simplu: doar substantiv
$NP \rightarrow det\ NP$	cu parte determinantă (art/adj)
$VP \rightarrow verb$	predicat simplu: doar verb
$VP \rightarrow verb\ NP$	verb cu complement

Am descris limbajul prin *reguli de producție* (de *rescriere*)

Simbolurile folosite în regulile de producție sunt:

neterminale: simboluri care apar în stânga $\rightarrow$ (sunt înlocuite)

terminale: simboluri care apar numai în dreapta $\rightarrow$

O gramatică descrie un limbaj

Orice limbaj e descris prin *simbolurile* și *sintaxa* sa:
regulile după care simbolurile pot fi combinate corect.

O *gramatică* descrie cum se obțin șirurile unui limbaj
prin *reguli de producție* (*reguli de rescriere*)
pornind de la un *simbol de start*

O *derivare* a unui șir dintr-o gramatică e o *secvență de aplicări* a *regulilor de producție* care transformă simbolul de start în șirul dat.
indicăm la fiecare pas și simbolul transformat

O derivare ne arată că șirul aparține limbajului definit de gramatică.

$S \rightarrow NP\ VP \rightarrow NP\ verb\ NP \rightarrow NP\ verb\ noun$
$\rightarrow det\ NP\ verb\ noun \rightarrow det\ det\ NP\ verb\ noun$
$\rightarrow det\ det\ noun\ verb\ noun \rightarrow a\ good\ student\ reads\ books$

Derivare. Derivare leftmost/rightmost

Formal, dacă x și y sunt forme propoziționale și $\alpha \to \beta$ este o regulă de producție, atunci numim *derivare* înlocuirea lui α cu β in $x\alpha y$ și notăm: $x\alpha y \to x\beta y$

Avem 2 tipuri de derivare:

leftmost: la fiecare pas rescriem neterminalul cel mai din **stânga**

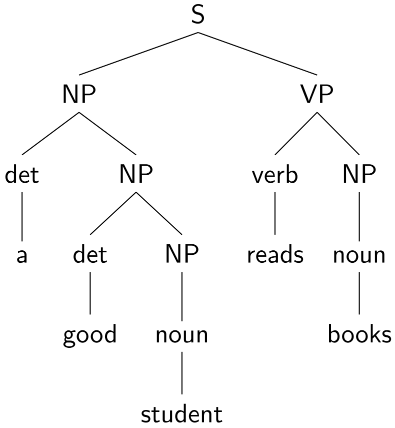
$S \to NP\ VP \to det\ NP\ VP \to det\ det\ NP\ VP$
$\to det\ det\ noun\ VP \to det\ det\ noun\ verb\ NP$
$\to det\ det\ noun\ verb\ noun \to a\ good\ student\ reads\ books$

rightmost: la fiecare pas rescriem neterminalul cel mai din **dreapta**

$S \to NP\ VP \to NP\ verb\ NP \to NP\ verb\ noun$
$\to det\ NP\ verb\ noun \to det\ det\ NP\ verb\ noun$
$\to det\ det\ noun\ verb\ noun \to a\ good\ student\ reads\ books$

Arborele de derivare

Arborele de derivare e o reprezentare *ierarhică* a unei derivări, scriind partea dreaptă a fiecărei reguli sub partea stângă:



A good student reads books.

S → NP VP

NP → det NP   VP → verb NP

NP → det NP   NP → noun

NP → noun

Exemple de limbaje definite prin gramatici

Șirurile de paranteze echilibrate:

orice paranteză deschisă (are o pereche închisă)

o paranteză se închide *după* închiderea celor deschise după ea

(1) $S \to \epsilon$ (notație pentru șirul vid)

(2) $S \to (S)S$

Derivare leftmost pt (())(): $S \xrightarrow{2} \underline{(S)S} \xrightarrow{2} (\underline{(S)S})S \xrightarrow{1} (()S)S \xrightarrow{1} (())S \xrightarrow{2} (())\underline{(S)S} \xrightarrow{1} (())()S \xrightarrow{1} (())()$

la fiecare pas, am colorat neterminalul transformat, am indicat regula folosită $\xrightarrow{1}$ sau $\xrightarrow{2}$ și am subliniat <u>în ce se transformă</u>

$\{ww^R \mid w \in \{a, b\}^*\}$ cuvânt+invers (palindrom, lungime pară)

$S \to \epsilon$

$S \to aSa$

$S \to bSb$

Gramatică formală

O gramatică formală G e formată din:

Σ: o mulțime de simboluri *terminale*
(din care se formează șirurile limbajului)

N: o mulțime de simboluri *neterminale*, $N \cap \Sigma = \emptyset$
(folosite doar în descrierea gramaticii, nu apar în limbaj)

P: o mulțime de *reguli de producție*, de forma
$(\Sigma \cup N)^* N (\Sigma \cup N)^* \to (\Sigma \cup N)^*$
un neterminal N, eventual într-un context (șir în stânga/dreapta)
e rescris cu un șir de terminale și neterminale

$S \in N$: un *simbol de start*

Limbajul definit de G e format din toate șirurile de *terminale*
care se pot obține din S printr-o derivare (aplicând oricâte reguli)

Gramatici recursive

O regulă de producție este *recursivă* dacă partea ei stângă (neterminalul ce va fi rescris + contextul său) apare și în partea ei dreaptă. Obs: o regulă recursivă se poate refolosi de oricâte ori.

Exemplu:

$S \rightarrow aSa$
$bA \rightarrow bbA$

O regulă de producție $A \rightarrow \beta$ este *indirect recursivă* dacă A poate fi derivat într-o formă ce îl conține pe A.

Exemplu:

$S \rightarrow aBa$
$B \rightarrow bSb$

O gramatică este *recursivă* dacă și numai dacă aceasta conține *cel puțin o regulă de producție recursivă sau indirect recursivă.*

Gramatici recursive și limbaje infinite

O gramatică a unui *limbaj infinit* (șiruri de lungime nelimitată) trebuie să fie *recursivă*.

Altfel, dacă avem n reguli de producție nerecursive

$\Rightarrow$ pt. derivarea unui șir putem avea *maxim n* pași de derivare

$\Rightarrow$ lungimea șirurilor este *limitată*

Ca să avem $n+1$ sau mai mulți pași de derivare a unui șir ar trebui să *refolosim* cel puțin o regulă de producție

$\Rightarrow$ regula de producție trebuie să fie *recursivă*

Ierarhia Chomsky [după Noam Chomsky]

Notăm: neterminale A, B; terminale: a, b; șiruri arbitrare: α, β, γ

3) gramatici *regulate*: generează *limbaje regulate*
reguli de forma:
$A \to a$, $A \to \varepsilon$, $A \to aB$ (regulate la dreapta), SAU
$A \to a$, $A \to \varepsilon$, $A \to Ba$ (regulate la stânga), NU le combinăm

Conversie în automate: câte o stare pentru fiecare neterminal,
$A \to aB$ devine Ⓐ $\xrightarrow{a}$ Ⓑ, $A \to a$ devine Ⓐ $\xrightarrow{a}$ Ⓞ (accept)

2) gramatici *independente de context*
reguli: $A \to \gamma$ stânga: neterminal; dreapta: șir arbitrar

1) gramatici *dependente de context*
reguli: $\alpha A \beta \to \alpha \gamma \beta$ A e rescris dacă apare între α și β
$\gamma \neq \epsilon$ (nevid), sau $S \to \epsilon$ doar dacă S nu apare în dreapta

0) gramatici nerestricționate (orice reguli de rescriere)
limbaje *recursiv enumerabile* (recunoscute de o mașină Turing)

Forma Backus-Naur (BNF)

dupa John Backus (dezvoltatorul limbajului FORTRAN)
și Peter Naur (ALGOL 60) (fiecare: premiul *Turing*)

Notație frecvent folosită pentru gramatici independente de context

folosește `::=` pentru definiție și `|` pentru alternativă

Neterminal ::= rescriere1 | rescriere2 | ... | rescriereN

uneori folosite cu extensii:

[*element-opțional*]
*simbol** (steaua Kleene) pentru repetiție
simbol+ (plus) pentru repetiție cel puțin odată
paranteze pentru gruparea elementelor

Exemple: instrucțiuni în C (simplificat)

Stmt ::= ExpStmt | IfStmt | WhileStmt | Block

ExpStmt ::= expr ;

IfStmt ::= **`if`** (expr) Stmt **`else`** Stmt | **`if`** (expr) Stmt

WhileStmt ::= **`while`** (expr) Stmt

Block ::= { Stmt* }

Problema: cu care **`if`** se potrivește **`else`** ?

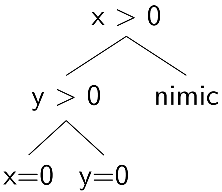
```
if (x > 0) if (y > 0) x = 0; else y = 0;
```

Gramatici ambigue

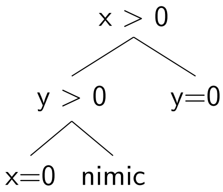
Înțelesul unui șir dintr-un limbaj e strict legat de *arborele de derivare* al șirului. Acesta ar trebui să fie *unic*.

O gramatică e *ambiguă* dacă există cel puțin un șir cu mai mulți *arbori de derivare* (arbori sintactici) *diferiți*
– sau, echivalent, dacă există cel puțin un șir cu mai multe derivări leftmost/rightmost *diferite*.

```
if (x > 0) if (y > 0) x = 0; else y = 0;
```



interpretarea corectă



interpretare incorectă (trebuie eliminată)

Exemplu de dezambiguare

Pentru a **dezambigua** gramatica, trebuie **rescrisă**: distingem între
- un `if` *echilibrat*, care are `else`
- un `if` *neechilibrat*, fără `else`

Cum `else` e asociat cu cel mai apropiat `if`, ramura `then` e *întotdeauna echilibrată* (definim echilibrate restul de instrucțiuni).

Stmt ::= BalancedStmt | UnBalancedIf

BalancedStmt ::= ExpStmt | WhileStmt | Block | BalancedIf

ExpStmt ::= expr ;

WhileStmt ::= `while` (expr) Stmt

Block ::= { Stmt* }

BalancedIf ::= `if` (expr) BalancedStmt `else` Stmt

UnBalancedIf ::= `if` (expr) Stmt

Expresii aritmetice (1)

v1) E ::= num | E + E | E - E | E ∗ E | E / E | (E)

și aici avem *ambiguitate*:
nu e precizată precedența operatorilor

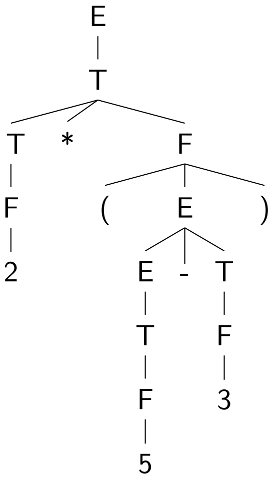
v2) Rescriem pe 3 nivele de *precedență*:

E ::= T | E + T | E - T

T ::= F | T ∗ F | T / F

F ::= num | (E)

Exemplu: `2 * (5 - 3)`



Expresii aritmetice (2)

În această scriere, *E* apare primul în stânga producțiilor lui *E* recursivitate *la stânga* ⇒ nu putem implementa direct (nu știm când să oprim apelul recursiv)

E ::= T | E + T | E - T

T ::= F | T * F | T / F

F ::= num | (E)

v3) Eliminăm *recursivitatea la stânga* ⇒ putem scrie direct cod

E ::= T RestE
RestE ::= ϵ | + T RestE | - T RestE

T ::= F RestT
RestT ::= ϵ | * F RestT | / F RestT

F ::= num | (E)

Expresii prefix și postfix (1)

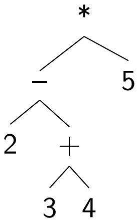
nu necesită paranteze, subexpresiile reies din structură

Expresii *prefix*: operatorul *înaintea* operanzilor
implicit: la fel și în *sub*expresii

E ::= num | Op E E

Op ::= + | - | * | /

$* \underbrace{-\ 2\ \underbrace{+\ 3\ 4}}\ 5 \quad = \quad$ `(2 - (3 + 4)) * 5`



Putem scrie direct cod pornind de la această gramatică!

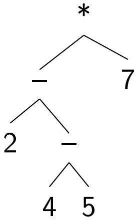
Expresii prefix și postfix (2)

Expresii *postfix*: operatorul *după* operanzi, la fel în subexpresii

E ::= num | E E Op

Op ::= + | - | * | /

$\underbrace{2\ \underbrace{4\ 5\ -}\ -}\ 7\ * \quad = \quad$ `(2 - (4 - 5)) * 7`



Putem elimina recursivitatea la stânga:

E ::= num RestE

RestE ::= ϵ | E Op RestE

Scrierile se pot obține prin traversarea arborelui expresiei:

în *preordine*: întâi operatorul, apoi subexpresiile (în același fel)

în *postordine*: întâi subexpresiile (în același fel), apoi operatorul