Logică și structuri discrete

Logica predicatelor

Casandra Holotescu

casandra@cs.upt.ro

https://tinyurl.com/lecturesLSD

În cursul de azi

Unificarea

Ce e o “demonstrație” și “totdeauna adevărat”
și limitele a ce putem demonstra

Unificarea

Cum se face unificarea?

În logica predicatelor, rezoluția *unifică* un literal cu negatul lui:

$$A \vee P(t_1, t_2, ..., t_n) \quad \text{și} \quad B \vee \neg P(t'_1, t'_2, ..., t'_n)$$

dacă putem unifica ("potrivi") argumentele lui P și $\neg P$: t_1 cu t'_1,...

Cum se face unificarea?

În logica predicatelor, rezoluția *unifică* un literal cu negatul lui:

$$A \vee P(t_1, t_2, ..., t_n) \quad \text{și} \quad B \vee \neg P(t_1', t_2', ..., t_n')$$

dacă putem unifica ("potrivi") argumentele lui P și $\neg P$: t_1 cu t_1',...

O *substituție* e o *funcție* care asociază unor *variabile* niște *termeni*:

$$\{x_1 \mapsto t_1, \ \ldots, x_n \mapsto t_n\}$$

Doi termeni se pot *unifica* dacă există o substituție care îi face egali (o asemenea substituție se numește *unificator*)

$$f(x, g(y, z), t)\{x \mapsto h(z), y \mapsto h(b), t \mapsto u\} = f(h(z), g(h(b), z), u)$$

Cum se face unificarea?

În logica predicatelor, rezoluția *unifică* un literal cu negatul lui:

$$A \vee P(t_1, t_2, ..., t_n) \quad \text{și} \quad B \vee \neg P(t'_1, t'_2, ..., t'_n)$$

dacă putem unifica ("potrivi") argumentele lui P și $\neg P$: t_1 cu t'_1,...

O *substituție* e o *funcție* care asociază unor *variabile* niște *termeni*:

$$\{x_1 \mapsto t_1, \ \ldots, x_n \mapsto t_n\}$$

Doi termeni se pot *unifica* dacă există o substituție care îi face egali (o asemenea substituție se numește *unificator*)

$$f(x, g(y, z), t)\{x \mapsto h(z), y \mapsto h(b), t \mapsto u\} = f(h(z), g(h(b), z), u)$$

Termenul T cu substituția σ se notează uzual postfix: $T\sigma$

Substituția găsită se aplică predicatelor care rămân (rezolventul):

$$\frac{A \vee P(t_1, t_2, ..., t_n) \qquad B \vee \neg P(t'_1, t'_2, ..., t'_n)}{A\sigma \vee B\sigma}$$

Reguli de unificare

O *variabilă* x poate fi unificată cu orice *termen* t (substituție)
dacă x *nu apare* în t (altfel, substituind obținem un termen infinit)
deci nu: x cu $f(h(y), g(x, z))$; dar trivial, putem unifica x cu x

Doi *termeni* $f(...)$ pot fi unificați doar dacă au aceeași funcție,
și *argumentele* (termeni) pot fi unificate (poziție cu poziție)

Două *constante* (funcții cu 0 arg.) $\Rightarrow$ unificate dacă sunt identice

$\Rightarrow$ cu aceste reguli, putem găsi *cel mai general unificator*
(orice alt unificator se poate obține din el printr-o altă substituție)

Demonstrații în logica predicatelor

Cât de generală e o demonstrație?

$$\forall x(boy(x) \vee girl(x) \rightarrow child(x))$$

$$\neg boy(x) \vee \neg girl(x) \vee child(x)$$

$$\neg(\forall x \neg(child(x) \wedge getstrain(x)) \rightarrow \forall x \neg(boy(x) \wedge good(x)))$$

$$(\neg child(y) \vee \neg getstrain(y)) \wedge boy(c) \wedge good(c)$$

rezoluție: $$\frac{\neg boy(x) \vee \neg girl(x) \vee child(x) \qquad boy(c)}{\neg girl(c) \vee child(c)}$$

Demonstrația e făcută *fără* a ține cont (sau înțelege) *semnificația* predicatelor *boy*, *child*, *good*, etc.:

puteau fi $P(x), Q(x), R(x), \ldots$

Demonstrația e valabilă pentru *orice predicate* care satisfac ipotezele.

La ce e bună o demonstrație generală?

Exemplu de teoremă:

O *relație de echivalență* definește o *partiție* a mulțimii de definiție.

$\forall x\, R(x,x)$	reflexivitate
$\land\ \forall x \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x))$	simetrie
$\land\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$	tranzitivitate
$\to \forall x \forall y\, (\neg \exists z (R(x,z) \land R(y,z))$	clase disjuncte
$\lor\ \forall z\, (R(x,z) \leftrightarrow R(y,z)))$	sau clase identice

La ce e bună o demonstrație generală?

Exemplu de teoremă:
O *relație de echivalență* definește o *partiție* a mulțimii de definiție.

$\forall x\, R(x,x)$	reflexivitate
$\land\ \forall x \forall y\, (R(x,y) \to R(y,x))$	simetrie
$\land\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \land R(y,z) \to R(x,z))$	tranzitivitate
$\to \forall x \forall y\, (\neg \exists z (R(x,z) \land R(y,z))$	clase disjuncte
$\qquad \lor\ \forall z\, (R(x,z) \leftrightarrow R(y,z)))$	sau clase identice

Teorema e adevărată indiferent de *semnificația* atribuită lui $R(x,y)$ (indiferent de *interpretare*). R ar putea fi (printre altele):

$R(x,y) \stackrel{def}{=} x \equiv y \mod d$ (același rest la împărțirea cu d)

$R(x,y) \stackrel{def}{=} length(x) = length(y)$ liste/șiruri de aceeași lung.

Definim mai precis ce înseamnă o *demonstrație*.

Recapitulăm: sintaxa logicii predicatelor

Formulele logicii predicatelor sunt definite *structural recursiv*:

Termenii

variabilă v sau constantă c	
$f(t_1, \cdots, t_n)$	cu f funcție n-ară și $t_1, \cdots, t_n$ *termeni*

Formule (well-formed formulas, formule bine formate):

$P(t_1, \cdots, t_n)$	cu P predicat n-ar; $t_1, \cdots, t_n$ termeni
$\neg\alpha$	unde α este o formulă
$\alpha \rightarrow \beta$	unde α, β sunt formule
$\forall v\, \alpha$	cu v variabilă, α formulă: *cuantificare universală*
$t_1 = t_2$	cu t_1, t_2 termeni (în logica de ord. I cu egalitate)

În loc de propoziții avem *predicate* (peste *termeni*).

Sintaxă și semantică

Ca în logica propozițională (și pentru orice limbaj), deosebim

sintaxa = *forma, regulile* după care construim ceva (aici, formule)

semantica = *înțelesul* construcțiilor de limbaj

La fel ca în logic propozițională, lucrăm cu

deducția (demonstrația): procedeu pur sintactic

implicația / consecința logică (consecința semantică): *interpretăm* formula (*înțelesul* ei, valoarea de adevăr)

Ne interesează corespondența dintre aceste două aspecte.

Reguli și ce înseamnă aplicarea lor

Regulile discutate sunt *sintactice*:

manipulează forma (*simboluri*, nu înțelesul lor).

Reguli și ce înseamnă aplicarea lor

Regulile discutate sunt *sintactice*:
manipulează forma (*simboluri*, nu înțelesul lor).

Regulile lui deMorgan: $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b, \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Înlocuim o formă cu alta.

Rezultatul: formulele sunt echivalente

Reguli și ce înseamnă aplicarea lor

Regulile discutate sunt *sintactice*:

manipulează forma (*simboluri*, nu înțelesul lor).

Regulile lui deMorgan: $\neg(a \lor b) = \neg a \land \neg b, \quad \neg(a \land b) = \neg a \lor \neg b$

Înlocuim o formă cu alta.

Rezultatul: formulele sunt echivalente

Regulă: Dacă un literal L e singur într-o clauză:

ștergem toate clauzele din care apare

ștergem $\neg L$ din toate clauzele

Rezultatul: dacă formula era realizabilă, rămâne realizabilă

Reguli și ce înseamnă aplicarea lor

Regulile discutate sunt *sintactice*:
manipulează forma (*simboluri*, nu înțelesul lor).

Regulile lui deMorgan: $\neg(a \vee b) = \neg a \wedge \neg b, \quad \neg(a \wedge b) = \neg a \vee \neg b$

Înlocuim o formă cu alta.

Rezultatul: formulele sunt echivalente

Regulă: Dacă un literal L e singur într-o clauză:
ștergem toate clauzele din care apare
ștergem $\neg L$ din toate clauzele

Rezultatul: dacă formula era realizabilă, rămâne realizabilă

Rezoluția: $$\frac{p \vee A \qquad \neg p \vee B}{A \vee B}$$

Rezultatul: dacă formula era realizabilă, rămâne realizabilă

Axiomele calculului predicatelor

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A1-A3 din logica propozițională)

A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$

A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$

Axiomele calculului predicatelor

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A1-A3 din logica propozițională)
A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
A4: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
A5: $\forall x\alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$ dacă x poate fi substituit* cu t în α
A6: $\alpha \to \forall x\alpha$ dacă x nu apare liber în α

*Definim: putem *substitui* variabila x cu termenul t în $\forall y\varphi$ dacă:
x nu apare liber în φ (substituția nu are efect) sau
x se poate substitui cu t în φ și y nu apare în t
(nu putem substitui variabile legate)

Axiomele calculului predicatelor

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A1-A3 din logica propozițională)
A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
A4: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
A5: $\forall x\alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$ dacă x poate fi substituit* cu t în α
A6: $\alpha \to \forall x\alpha$ dacă x nu apare liber în α

*Definim: putem *substitui* variabila x cu termenul t în $\forall y\varphi$ dacă:
x nu apare liber în φ (substituția nu are efect) sau
x se poate substitui cu t în φ și y nu apare în t
(nu putem substitui variabile legate)

În logica cu egalitate, adăugăm și
A7: $x = x$
A8: $x = y \to \alpha = \beta$

unde β se obține din α înlocuind oricâte din aparițiile lui x cu y.

Axiomele calculului predicatelor

A1: $\alpha \to (\beta \to \alpha)$ (A1-A3 din logica propozițională)
A2: $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$
A3: $(\neg\beta \to \neg\alpha) \to (\alpha \to \beta)$
A4: $\forall x(\alpha \to \beta) \to (\forall x\alpha \to \forall x\beta)$
A5: $\forall x\alpha \to \alpha[x \leftarrow t]$ dacă x poate fi substituit* cu t în α
A6: $\alpha \to \forall x\alpha$ dacă x nu apare liber în α

*Definim: putem *substitui* variabila x cu termenul t în $\forall y\varphi$ dacă:
x nu apare liber în φ (substituția nu are efect) sau
x se poate substitui cu t în φ și y nu apare în t
(nu putem substitui variabile legate)

În logica cu egalitate, adăugăm și
A7: $x = x$
A8: $x = y \to \alpha = \beta$
unde β se obține din α înlocuind oricâte din aparițiile lui x cu y.

Regula de inferență: e suficient *modus ponens*: $\dfrac{A \quad A \to B}{B}$

Deducție

Fie H o mulțime de formule. O *deducție* (demonstrație) din H e un șir de formule $A_1, A_2, \cdots, A_n$, astfel ca $\forall i \in \overline{1, n}$

1. A_i este o *axiomă*, sau
2. A_i este o *ipoteză* (o formulă din H), sau
3. A_i rezultă prin *modus ponens* din A_j, A_k anterioare $(j, k < i)$

Spunem că A_n *rezultă* din H (e *deductibil*, e o *consecință*). Notăm:

$$H \vdash A_n$$

Alte reguli de inferență

$$\frac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere universală* (*vezi* $A5$)

unde c e o constantă arbitrară (nu apare anterior în demonstrație)

Dacă φ e valabil pentru orice x, atunci și pentru o valoare arbitrară c.

Alte reguli de inferență

$$\frac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere universală* (*vezi A*5)

unde c e o constantă arbitrară (nu apare anterior în demonstrație)
Dacă φ e valabil pentru orice x, atunci și pentru o valoare arbitrară c.

$$\frac{\varphi(c)}{\forall x\ \varphi(x)}$$ *generalizare universală* (*vezi A*6)

unde c e o valoare arbitrară (*nu apare în ipoteze*)
Dacă φ e valabilă pentru o valoare arbitrară, e valabilă pentru orice x.

Alte reguli de inferență

$$\frac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere universală* (*vezi A*5)

unde c e o constantă arbitrară (nu apare anterior în demonstrație)
Dacă φ e valabil pentru orice x, atunci și pentru o valoare arbitrară c.

$$\frac{\varphi(c)}{\forall x\ \varphi(x)}$$ *generalizare universală* (*vezi A*6)

unde c e o valoare arbitrară (*nu apare în ipoteze*)
Dacă φ e valabilă pentru o valoare arbitrară, e valabilă pentru orice x.

$$\frac{\exists x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere existențială*

Dacă există o valoare cu proprietatea φ, o instanțiem (cu un nume nou).

Alte reguli de inferență

$$\frac{\forall x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere universală* (*vezi* $A5$)

unde c e o constantă arbitrară (nu apare anterior în demonstrație)
Dacă φ e valabil pentru orice x, atunci și pentru o valoare arbitrară c.

$$\frac{\varphi(c)}{\forall x\ \varphi(x)}$$ *generalizare universală* (*vezi* $A6$)

unde c e o valoare arbitrară (*nu apare în ipoteze*)
Dacă φ e valabilă pentru o valoare arbitrară, e valabilă pentru orice x.

$$\frac{\exists x\ \varphi(x)}{\varphi(c)}$$ *instanțiere existențială*

Dacă există o valoare cu proprietatea φ, o instanțiem (cu un nume nou).

$$\frac{\varphi(c)}{\exists x\ \varphi(x)}$$ *generalizare existențială*

Dacă φ e adevărată pentru o valoare, există o valoare care o face adevărată

Semantica

Definim noțiunile:

univers

interpretare

model

consecință semantică

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un *înțeles* pentru fiecare simbol din formulă:

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un *înțeles* pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I în logica predicatelor constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un *înțeles* pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I în logica predicatelor constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
- pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un *înțeles* pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I în logica predicatelor constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
- pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$
- pentru orice simbol de funcție n-ară f, o funcție $f_I : U^n \to U$

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un *înțeles* pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I în logica predicatelor constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
- pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$
- pentru orice simbol de funcție n-ară f, o funcție $f_I : U^n \to U$
- pentru orice simbol de predicat n-ar P, o submulțime $P_I \subseteq U^n$. (o *relație* n-ară pe U)

Cum interpretăm o formulă ?

Intuitiv, găsim un *înțeles* pentru fiecare simbol din formulă:

O *interpretare* (*structură*) I în logica predicatelor constă din:

- o mulțime nevidă U numită *universul* sau *domeniul* lui I (mulțimea valorilor pe care le pot lua variabilele)
- pentru orice simbol de constantă c, o valoare $c_I \in U$
- pentru orice simbol de funcție n-ară f, o funcție $f_I : U^n \to U$
- pentru orice simbol de predicat n-ar P, o submulțime $P_I \subseteq U^n$. (o *relație* n-ară pe U)

Deci, dăm o *interpretare* fiecărui simbol din formulă.

O interpretare *nu* dă valori variabilelor (vezi ulterior: atribuire).

Exemple de interpretări

$\forall x \forall y \forall z . P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)$ tranzitivitate

De exemplu:

universul U = numere reale;

predicatul P: relația $\leq$

Exemple de interpretări

$\forall x \forall y \forall z . P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)$ tranzitivitate

De exemplu:

universul U $=$ numere reale;

predicatul P: relația $\leq$

$\exists e \forall x \neg A(x, e)$

existența mulțimii vide:

predicatul $A(x, y)$ e $x \in y$

Exemple de interpretări

$\forall x \forall y \forall z . P(x, y) \wedge P(y, z) \rightarrow P(x, z)$ tranzitivitate

De exemplu:

universul U = numere reale;

predicatul P: relația $\leq$

$\exists e \forall x \neg A(x, e)$

existența mulțimii vide:

predicatul $A(x, y)$ e $x \in y$

$\forall x . \forall y . P(x, y) \rightarrow \exists z . P(x, z) \wedge P(z, y)$

Putem găsi o interpretare în care e adevărată și una în care e falsă

Atribuiri și valori de adevăr

Fie I o *interpretare* cu univers U
și fie V mulțimea tuturor simbolurilor de variabile.

O *atribuire* este o funcție $s : V \to U$
(dă fiecărei *variabile libere* o *valoare* din *univers*)

$\Rightarrow$ din atribuirea s se poate obține valoarea pentru orice *termen*
(știm valoarea fiecărei variabile și înțelesul fiecărei funcții)

Atribuiri și valori de adevăr

Fie I o *interpretare* cu univers U
și fie V mulțimea tuturor simbolurilor de variabile.

O *atribuire* este o funcție $s : V \to U$
(dă fiecărei *variabile libere* o *valoare* din *univers*)

$\Rightarrow$ din atribuirea s se poate obține valoarea pentru orice *termen*
(știm valoarea fiecărei variabile și înțelesul fiecărei funcții)

Interpretarea I dă și înțelesul fiecărui *predicat*
$\Rightarrow$ putem calcula *valoarea de adevăr* a unei formule
$\neg$, $\to$ etc. au înțelesul cunoscut din logica propozițională
trebuie definit înțelesul (semantica) lui $\forall$

Atribuiri și valori de adevăr

Fie I o *interpretare* cu univers U
și fie V mulțimea tuturor simbolurilor de variabile.

O *atribuire* este o funcție $s : V \to U$
(dă fiecărei *variabile libere* o *valoare* din *univers*)

$\Rightarrow$ din atribuirea s se poate obține valoarea pentru orice *termen*
(știm valoarea fiecărei variabile și înțelesul fiecărei funcții)

Interpretarea I dă și înțelesul fiecărui *predicat*
$\Rightarrow$ putem calcula *valoarea de adevăr* a unei formule
$\neg$, $\to$ etc. au înțelesul cunoscut din logica propozițională
trebuie definit înțelesul (semantica) lui $\forall$

Spunem că $\forall x \varphi$ e adevărată în interpretarea I cu atribuirea s dacă φ e adevărată înlocuind x cu *orice* valoare $d \in U$ din univers.

Modele și tautologii

Un *model* pentru o formulă φ e o interpretare în care formula e adevărată *pentru orice atribuire* a variabilelor.

Spunem că φ e *adevărată* în interpretarea I, și notăm $I \models \varphi$

Modele și tautologii

Un *model* pentru o formulă φ e o interpretare în care formula e adevărată *pentru orice atribuire* a variabilelor.

Spunem că φ e *adevărată* în interpretarea I, și notăm $I \models \varphi$

Obs: Dacă o formulă nu are variabile *libere*, valoarea ei de adevăr depinde doar de interpretare, nu și de vreo atribuire.

Def: O *tautologie* e o formulă adevărată în *orice* interpretare.

Modele și tautologii

Un *model* pentru o formulă φ e o interpretare în care formula e adevărată *pentru orice atribuire* a variabilelor.

Spunem că φ e *adevărată* în interpretarea I, și notăm $I \models \varphi$

Obs: Dacă o formulă nu are variabile *libere*, valoarea ei de adevăr depinde doar de interpretare, nu și de vreo atribuire.

Def: O *tautologie* e o formulă adevărată în *orice* interpretare.

Spre deosebire de logica propozițională, în logica predicatelor, numărul interpretărilor e *infinit*

$\Rightarrow$ nu mai putem construi exhaustiv tabelul de adevăr.

E *esențial* deci să putem *demonstra* o formulă
(pornind de la axiome și reguli de inferență)

Implicația logică (consecința semantică)

Fie H o mulțime de formule și C o formulă.

Notăm $I \models H$ dacă I e un model pentru fiecare formulă din H.

Spunem că H *implică* C ($H \models C$) dacă pentru orice interpretare I,

$$I \models H \text{ implică } I \models C$$

(C e adev. în orice interpretare care satisface toate ipotezele din H)

Consistență și completitudine

La fel ca în logica propozițională
- *deducția* (demonstrația) se face pur sintactic
- *consecința/implicația logică* e o noțiune semantică,
  considerând *interpretări* și valori de adevăr.

Consistență și completitudine

La fel ca în logica propozițională
deducția (demonstrația) se face pur sintactic
consecința/implicația logică e o noțiune semantică,
considerând *interpretări* și valori de adevăr.

Calculul predicatelor de ordinul **I** este *consistent* și *complet*:

$$H \vdash C \text{ dacă și numai dacă } H \models C$$

Concluzia C se poate *deduce* (demonstra) $\vdash$ din ipotezele H dacă și numai dacă ea e o *consecință semantică* $\models$ a ipotezelor H
(e adevărată în orice *interpretare* care satisface toate ipotezele)

Consistență și completitudine

La fel ca în logica propozițională
deducția (demonstrația) se face pur sintactic
consecința/implicația logică e o noțiune semantică,
considerând *interpretări* și valori de adevăr.

Calculul predicatelor de ordinul I este *consistent* și *complet*:

$$H \vdash C \text{ dacă și numai dacă } H \models C$$

Concluzia C se poate *deduce* (demonstra) $\vdash$ din ipotezele H dacă și numai dacă ea e o *consecință semantică* $\models$ a ipotezelor H
(e adevărată în orice *interpretare* care satisface toate ipotezele)

Dar: relația de implicație logică e doar *semidecidabilă*
dacă o formulă e o tautologie, ea poate fi demonstrată
dar dacă nu e, încercarea de a o demonstra (sau o refuta) poate continua la nesfârșit

Există logici mai bogate decât logica predicatelor

Principiul *inducției* matematice e (în ciuda numelui)
o *regulă de deducție* în *teoria aritmetică* a numerelor naturale

$$\forall P[P(0) \land \forall k \in \mathbb{N}.P(k) \to P(k+1)] \to \forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

formulă în logica de *ordinul 2* (cuantificare peste predicate)

Există logici mai bogate decât logica predicatelor

Principiul *inducției* matematice e (în ciuda numelui)
o *regulă de deducție* în *teoria aritmetică* a numerelor naturale

$$\forall P[P(0) \land \forall k \in \mathbb{N}.P(k) \to P(k+1)] \to \forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

formulă în logica de *ordinul 2* (cuantificare peste predicate)

Poate fi definit ca o *schemă de axiome* (o axiomă pentru fiecare predicat), fără a cuantifica peste predicate

$$\forall \bar{x}[P(0,\bar{x}) \land \forall n(P(n,\bar{x}) \to P(S(n),\bar{x})) \to \forall n P(n,\bar{x})]$$

$\bar{x}$: toate celelalte variabile de care depinde predicatul P

Există logici mai bogate decât logica predicatelor

Principiul *inducției* matematice e (în ciuda numelui)
o *regulă de deducție* în *teoria aritmetică* a numerelor naturale

$$\forall P[P(0) \land \forall k \in \mathbb{N}.P(k) \to P(k+1)] \to \forall n \in \mathbb{N}\ P(n)$$

formulă în logica de *ordinul 2* (cuantificare peste predicate)

Poate fi definit ca o *schemă de axiome* (o axiomă pentru fiecare predicat), fără a cuantifica peste predicate

$$\forall \bar{x}[P(0, \bar{x}) \land \forall n(P(n, \bar{x}) \to P(S(n), \bar{x})) \to \forall n P(n, \bar{x})]$$

$\bar{x}$: toate celelalte variabile de care depinde predicatul P

Mai general: *inducția structurală*: demonstrăm proprietăți despre obiecte tot mai complexe (pt. obiecte definite inductiv/recursiv)

Logica are limitări

Teoria numerelor naturale cu adunare (aritmetica Presburger) e *decidabilă* (orice putem *exprima* despre adunarea numerelor naturale *e demonstrabil*).

Dar: nu putem exprima divizibilitate, numere prime, etc.

Aritmetica lui Peano (cu adunare și înmulțire) e mai bogată dar e *nedecidabilă*: sunt afirmații despre care *nu se poate decide* dacă sunt adevărate sau nu.

Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel

Prima teoremă de incompletitudine:

Orice sistem logic *consistent* care poate exprima aritmetica elementară e *incomplet*

Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel

Prima teoremă de incompletitudine:

Orice sistem logic *consistent* care poate exprima aritmetica elementară e *incomplet*

i.e., se pot scrie afirmații care nu pot fi nici demonstrate nici infirmate în acel sistem

Demonstrație: codificând formule și demonstrații ca numere construim un număr care exprimă că formula sa e nedemonstrabilă

Teoremele de incompletitudine ale lui Gödel

Prima teoremă de incompletitudine:

Orice sistem logic *consistent* care poate exprima aritmetica elementară e *incomplet*

i.e., se pot scrie afirmații care nu pot fi nici demonstrate nici infirmate în acel sistem

Demonstrație: codificând formule și demonstrații ca numere construim un număr care exprimă că formula sa e nedemonstrabilă

A doua teoremă de incompletitudine:

Consistența unui sistem logic capabil să exprime aritmetica elementară *nu poate fi demonstrată* în cadrul acelui sistem.

dar ar putea fi eventual demonstrată în alt sistem logic