Exemple de utilizare a metodei rezoluţiei în Logica Predicatelor

Chapter 1

Exemplu 1

1.1 Enunţ

1. Mary iubeşte doar băieţii cu bani.
2. Orice student care nu promovează nu e angajat.
3. John e un student.
4. Orice student care nu învaţă nu promovează.
5. Oricine nu e angajat nu are bani.
6. Concluzie: Dacă John nu învaţă, atunci Mary nu îl iubeşte pe John.

1.2 Formalizare

1. Mary iubeşte doar băieţii cu bani.

$$\forall x(MaryIubeste(x) \rightarrow AreBani(x)) \tag{1.1}$$

2. Orice student care nu promovează nu e angajat.

$$\forall x(Student(x) \wedge \neg Promovat(x) \rightarrow \neg Angajat(x)) \tag{1.2}$$

3. John e un student.

$$Student(John) \tag{1.3}$$

4. Orice student care nu învaţă nu promovează.

$$\forall x(Student(x) \wedge \neg Invata(x) \rightarrow \neg Promovat(x)) \tag{1.4}$$

5. Oricine nu e angajat nu are bani.

$$\forall x(\neg Angajat(x) \rightarrow \neg AreBani(x)) \tag{1.5}$$

6. Concluzie: Dacă John nu învaţă, atunci Mary nu îl iubeşte pe John.

$$\neg Invata(John) \rightarrow \neg MaryIubeste(John) \tag{1.6}$$

Vrem să demonstrăm că

$$(1.1) \wedge (1.2) \wedge (1.3) \wedge (1.4) \wedge (1.5) \rightarrow (1.6)$$

ceea ce e echivalent cu a demonstra ca următoarea formulă e invalidă:

$$(1.1) \wedge (1.2) \wedge (1.3) \wedge (1.4) \wedge (1.5) \wedge \neg(1.6)$$

1.3 Aducerea în formă clauzală

1.3.1 Formula iniţială

$$\forall x(MaryIubeste(x) \rightarrow AreBani(x)) \wedge \forall x(Student(x) \wedge \neg Promovat(x) \rightarrow \neg Angajat(x))$$
$$\wedge\, Student(John) \wedge \forall x(Student(x) \wedge \neg Invata(x) \rightarrow \neg Promovat(x))$$
$$\wedge\, \forall x(\neg Angajat(x) \rightarrow \neg AreBani(x)) \wedge \neg(\neg Invata(John) \rightarrow \neg MaryIubeste(John))$$

1.3.2 Redenumirea variabilelor

$$\forall x(MaryIubeste(x) \rightarrow AreBani(x)) \wedge \forall y(Student(y) \wedge \neg Promovat(y) \rightarrow \neg Angajat(y))$$
$$\wedge\, Student(John) \wedge \forall z(Student(z) \wedge \neg Invata(z) \rightarrow \neg Promovat(z))$$
$$\wedge\, \forall t(\neg Angajat(t) \rightarrow \neg AreBani(t)) \wedge \neg(\neg Invata(John) \rightarrow \neg MaryIubeste(John))$$

1.3.3 Eliminarea implicaţiilor

$$\forall x(\neg MaryIubeste(x) \vee AreBani(x)) \wedge \forall y(\neg(Student(y) \wedge \neg Promovat(y)) \vee \neg Angajat(y))$$
$$\wedge\, Student(John) \wedge \forall z(\neg(Student(z) \wedge \neg Invata(z)) \vee \neg Promovat(z))$$
$$\wedge\, \forall t(\neg\neg Angajat(t) \vee \neg AreBani(t)) \wedge \neg(\neg\neg Invata(John) \vee \neg MaryIubeste(John))$$

1.3.4 Împingerea negaţiilor în subformule (aplicând legile lui De Morgan)

$$\forall x(\neg MaryIubeste(x) \vee AreBani(x)) \wedge \forall y(\neg Student(y) \vee \neg\neg Promovat(y) \vee \neg Angajat(y))$$
$$\wedge\, Student(John) \wedge \forall z(\neg Student(z) \vee \neg\neg Invata(z) \vee \neg Promovat(z))$$
$$\wedge\, \forall t(\neg\neg Angajat(t) \vee \neg AreBani(t)) \wedge (\neg\neg\neg Invata(John) \wedge \neg\neg MaryIubeste(John))$$

Eventualele duble negatii se simplifica:

$$\forall x(\neg MaryIubeste(x) \vee AreBani(x)) \wedge \forall y(\neg Student(y) \vee Promovat(y) \vee \neg Angajat(y))$$
$$\wedge\, Student(John) \wedge \forall z(\neg Student(z) \vee Invata(z) \vee \neg Promovat(z))$$
$$\wedge\, \forall t(Angajat(t) \vee \neg AreBani(t)) \wedge \neg Invata(John) \wedge MaryIubeste(John)$$

1.3.5 Mutarea cuantificatorilor în partea stângă a ecuaţiei

$$\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad \forall t \quad ((\neg MaryIubeste(x) \vee AreBani(x))$$
$$\wedge\, (\neg Student(y) \vee Promovat(y) \vee \neg Angajat(y)) \wedge Student(John)$$
$$\wedge\, (\neg Student(z) \vee Invata(z) \vee \neg Promovat(z))$$
$$\wedge\, (Angajat(t) \vee \neg AreBani(t)) \wedge \neg Invata(John) \wedge MaryIubeste(John))$$

1.3.6 Distribuirea disjuncţiei peste conjuncţie pentru obţinerea formei Prenex CNF

In cazul de faţă avem deja formula în forma Prenex Normal Conjunctivă:

$$\forall x \quad \forall y \quad \forall z \quad \forall t \quad ((\neg MaryIubeste(x) \vee AreBani(x))$$
$$\wedge\, (\neg Student(y) \vee Promovat(y) \vee \neg Angajat(y)) \wedge Student(John)$$
$$\wedge\, (\neg Student(z) \vee Invata(z) \vee \neg Promovat(z))$$
$$\wedge\, (Angajat(t) \vee \neg AreBani(t)) \wedge \neg Invata(John) \wedge MaryIubeste(John))$$

1.3.7 Înlocuirea variabilelor libere cu constante

Nu este cazul, nu avem variabile libere.

1.3.8 Eliminarea cuantificatorilor existenţiali utilizând regula lui Skolem

Nu este cazul, nu avem cuantificatori existentiali in formula de faţă.

1.3.9 Reprezentare in forma clauzală

$\{\ \ \neg MaryIubeste(x) \lor AreBani(x), \quad \neg Student(y) \lor Promovat(y) \lor \neg Angajat(y),$
$Student(John), \quad \neg Student(z) \lor Invata(z) \lor \neg Promovat(z),$
$Angajat(t) \lor \neg AreBani(t), \quad \neg Invata(John), \quad MaryIubeste(John) \quad \}$

1.4 Rezolvare prin metoda rezoluţiei

1. $\neg MaryIubeste(x) \lor AreBani(x)$

   Premisă

2. $Student(y) \lor Promovat(y) \lor \neg Angajat(y)$

   Premisă

3. $Student(John)$

   Premisă

4. $\neg Student(z) \lor Invata(z) \lor \neg Promovat(z)$

   Premisă

5. $Angajat(t) \lor \neg AreBani(t)$

   Premisă

6. $\neg Invata(John)$

   Premisă

7. $MaryIubeste(John)$

   Premisă

8. $Invata(y) \lor \neg Angajat(y)$

   Din 2 şi 4, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{z/y\}$, se elimină literalii $Student(y)$ si $\neg Student(y)$

9. $Invata(John) \vee \neg Promovat(John)$

Din 3 şi 4, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{z/John\}$, se elimină literalii $Student(John)$ si $\neg Student(John)$

10. $AreBani(John)$

Din 1 şi 7, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x/John\}$, se elimină literalii $MaryIubeste(John)$ si $\neg MaryIubeste(John)$

11. $Invata(y) \vee \neg AreBani(y)$

Din 5 şi 8, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{t/y\}$, se elimină literalii $Angajat(y)$ si $\neg Angajat(y)$

12. $Invata(John)$

Din 10 şi 11, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{y/John\}$, se elimină perechea de literali complementari $AreBani(John)$ si $\neg AreBani(John)$

13. $\square$

Din 6 şi 12, prin rezoluţie se elimină perechile de literali $Invata(John)$ si $\neg Invata(John)$, $AreBani(John)$ si $\neg AreBani(John)$

Am obţinut clauza vidă, deci formula de la care am pornit, si care conţine printre premise negata concluziei 1.6, este invalidă. Asta înseamnă că formula 1.2, adică implicaţia iniţială, este validă.

Chapter 2

Exemplu 2

2.1 Enunţ

1. Fiecare pasăre doarme într-un copac.
2. Fiecare cufundar e o pasăre si fiecare cufundar e un animal acvatic
3. Orice copac în care doarme o pasăre acvaticăe lângă un lac.
4. Orice doarme într-un loc aflat lângă un lac mănâncă peşte.
5. Concluzie: Toţi cufundarii mănâncă peşte.

2.2 Formalizare

1. Fiecare pasăre doarme într-un copac.

$$\forall x(Pasare(x) \rightarrow \exists y(Copac(y) \land Doarme(x, y))) \tag{2.1}$$

2. Fiecare cufundar e o pasăre si fiecare cufundar e un animal acvatic

$$\forall x(Cufundar(x) \rightarrow Pasare(x) \land Acvatic(x)) \tag{2.2}$$

3. Orice copac în care doarme o pasăre acvatică e lângă un lac.

$$\forall x(Copac(x) \land \exists y(Pasare(y) \land Acvatic(y) \land Doarme(y, x)) \rightarrow LangaLac(x)) \tag{2.3}$$

4. Orice doarme într-un loc aflat lângă un lac mănâncă peşte.

$$\forall x(\exists y(Doarme(x, y) \land LangaLac(y)) \rightarrow ManancaPeste(x)) \tag{2.4}$$

5. Concluzie: Toţi cufundarii mănâncă peşte.

$$\forall x(Cufundar(x) \rightarrow ManancaPeste(x)) \tag{2.5}$$

Vrem să demonstrăm că

$$(2.1) \wedge (2.2) \wedge (2.3) \wedge (2.4) \rightarrow (2.5)$$

ceea ce e echivalent cu a demonstra ca următoarea formulă e invalidă:

$$(2.1) \wedge (2.2) \wedge (2.3) \wedge (2.4) \wedge \neg(2.5)$$

2.3 Aducerea în formă clauzală

2.3.1 Formula iniţială

$\forall x(Pasare(x) \rightarrow \exists y(Copac(y) \wedge Doarme(x, y))$
$\wedge \forall x(Cufundar(x) \rightarrow Pasare(x) \wedge Acvatic(x))$
$\wedge \forall x((Copac(x) \wedge \exists y(Pasare(y) \wedge Acvatic(y) \wedge Doarme(y, x)) \rightarrow LangaLac(x))$
$\wedge \forall x(\exists y(Doarme(x, y) \wedge LangaLac(y)) \rightarrow ManancaPeste(x))$
$\wedge \neg(\forall x(Cufundar(x) \rightarrow ManancaPeste(x)))$

2.3.2 Redenumirea variabilelor

$\forall x1(Pasare(x1) \rightarrow \exists x2(Copac(x2) \wedge Doarme(x1, x2))$
$\wedge \forall x3(Cufundar(x3) \rightarrow Pasare(x3) \wedge Acvatic(x3))$
$\wedge \forall x4((Copac(x4) \wedge \exists x5(Pasare(x5) \wedge Acvatic(x5) \wedge Doarme(x5, x4)) \rightarrow LangaLac(x4))$
$\wedge \forall x6(\exists x7(Doarme(x6, x7) \wedge LangaLac(x7)) \rightarrow ManancaPeste(x6))$
$\wedge \neg(\forall x8(Cufundar(x8) \rightarrow ManancaPeste(x8)))$

2.3.3 Eliminarea implicaţiilor

$\forall x1(\neg Pasare(x1) \vee (\exists x2(Copac(x2) \wedge Doarme(x1, x2)))$
$\wedge \forall x3(\neg Cufundar(x3) \vee (Pasare(x3) \wedge Acvatic(x3)))$
$\wedge \forall x4(\neg(Copac(x4) \wedge \exists x5(Pasare(x5) \wedge Acvatic(x5) \wedge Doarme(x5, x4)) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge \forall x6(\neg(\exists x7(Doarme(x6, x7) \wedge LangaLac(x7))) \vee ManancaPeste(x6))$
$\wedge \neg(\forall x8(\neg Cufundar(x8) \vee ManancaPeste(x8)))$

2.3.4 Împingerea negaţiilor în subformule (aplicând legile lui De Morgan)

$\forall x1(\neg Pasare(x1) \vee (\exists x2(Copac(x2) \wedge Doarme(x1,x2)))$
$\wedge \forall x3(\neg Cufundar(x3) \vee (Pasare(x3) \wedge Acvatic(x3)))$
$\wedge \forall x4(\neg Copac(x4) \vee \neg(\exists x5(Pasare(x5) \wedge Acvatic(x5) \wedge Doarme(x5,x4)) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge \forall x6(\forall x7\neg(Doarme(x6,x7) \wedge LangaLac(x7))) \vee Mananca Peste(x6))$
$\wedge \exists x8(\neg(\neg Cufundar(x8) \vee Mananca Peste(x8)))$

Atunci când avem formule negate care conţin cuantificatori existenţiali sau universali, folosim faptul ca $\neg\forall x P(x) \equiv \exists x\neg P(x)$ şi $\neg\exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$. Simplificăm dublele negaţii.

$\forall x1(\neg Pasare(x1) \vee (\exists x2(Copac(x2) \wedge Doarme(x1,x2)))$
$\wedge \forall x3(\neg Cufundar(x3) \vee (Pasare(x3) \wedge Acvatic(x3)))$
$\wedge \forall x4(\neg Copac(x4) \vee (\forall x5\neg(Pasare(x5) \wedge Acvatic(x5) \wedge Doarme(x5,x4)) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge \forall x6(\forall x7(\neg Doarme(x6,x7) \vee \neg LangaLac(x7))) \vee Mananca Peste(x6))$
$\wedge \exists x8(Cufundar(x8) \wedge \neg Mananca Peste(x8))$

În final, obţinem formula de mai jos, în care negaţiile mai apar doar în dreptul predicatelor:

$\forall x1(\neg Pasare(x1) \vee (\exists x2(Copac(x2) \wedge Doarme(x1,x2)))$
$\wedge \forall x3(\neg Cufundar(x3) \vee (Pasare(x3) \wedge Acvatic(x3)))$
$\wedge \forall x4(\neg Copac(x4) \vee (\forall x5(\neg Pasare(x5) \vee \neg Acvatic(x5) \vee \neg Doarme(x5,x4)) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge \forall x6(\forall x7(\neg Doarme(x6,x7) \vee \neg LangaLac(x7))) \vee Mananca Peste(x6))$
$\wedge \exists x8(Cufundar(x8) \wedge \neg Mananca Peste(x8))$

2.3.5 Mutarea cuantificatorilor în partea stângă a ecuaţiei

$\exists x8 \quad \forall x1 \quad \exists x2 \quad \forall x3 \quad \forall x4 \quad \forall x5 \quad \forall x6 \quad \forall x7 \qquad ((\neg Pasare(x1) \vee ((Copac(x2) \wedge Doarme(x1,x2)))$
$\wedge (\neg Cufundar(x3) \vee (Pasare(x3) \wedge Acvatic(x3)))$
$\wedge (\neg Copac(x4) \vee \neg Pasare(x5) \vee \neg Acvatic(x5) \vee \neg Doarme(x5,x4) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge (\neg Doarme(x6,x7) \vee \neg LangaLac(x7) \vee Mananca Peste(x6))$
$\wedge Cufundar(x8) \wedge \neg Mananca Peste(x8))$

2.3.6 Distribuirea disjuncţiei peste conjuncţie pentru obţinerea formei Prenex CNF

$\forall x1 \quad \exists x2 \quad \forall x3 \quad \forall x4 \quad \forall x5 \quad \forall x6 \quad \forall x7 \quad \exists x8$
$((\neg Pasare(x1) \vee Copac(x2)) \wedge (\neg Pasare(x1) \vee Doarme(x1, x2))$
$\wedge (\neg Cufundar(x3) \vee Pasare(x3)) \wedge (\neg Cufundar(x3) \vee Acvatic(x3))$
$\wedge (\neg Copac(x4) \vee \neg Pasare(x5) \vee \neg Acvatic(x5) \vee \neg Doarme(x5, x4) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge (\neg Doarme(x6, x7) \vee \neg LangaLac(x7) \vee ManancaPeste(x6)) \wedge Cufundar(x8)$
$\wedge \neg ManancaPeste(x8))$

2.3.7 Înlocuirea variabilelor libere cu constante

Nu este cazul, nu avem variabile libere.

2.3.8 Eliminarea cuantificatorilor existenţiali utilizând regula lui Skolem

Variabilele cuantificate existential sunt $x2$ si $x8$.

În formula originală, variabila $x2$ apare cuantificată existential în domeniul variabilei $x1$ cuantificată universal, în subformula

$$\forall x1(\neg Pasare(x1) \vee (\exists x2(Copac(x2) \wedge Doarme(x1, x2))$$

Astfel, conform regulii lui Skolem, putem să-l scriem pe $x2$ ca funcţie de $x1$, astfel: $x2 = f(x1)$, şi să-l înlocuim în această formă în formulă.

Totodată, în formula originală, $x8$ apare cuantificat existenţial în afara domeniului oricărei alte variabile în subformula

$$\exists x8(Cufundar(x8) \wedge \neg ManancaPeste(x8))$$

Deci, tot conform regulii lui Skolem, $x8$ poate fi înlocuit cu o constantă nouă, al cărei nume nu a fost folosit deja în formulă, astfel $x8 = a$.

Obţinem următoarea formulă:

$\forall x1 \quad \forall x3 \quad \forall x4 \quad \forall x5 \quad \forall x6 \quad \forall x7 \quad ((\neg Pasare(x1) \vee Copac(f(x1)))$
$\wedge (\neg Pasare(x1) \vee Doarme(x1, f(x1))) \wedge (\neg Cufundar(x3) \vee Pasare(x3))$
$\wedge (\neg Cufundar(x3) \vee Acvatic(x3))$
$\wedge (\neg Copac(x4) \vee \neg Pasare(x5) \vee \neg Acvatic(x5) \vee \neg Doarme(x5, x4) \vee LangaLac(x4))$
$\wedge (\neg Doarme(x6, x7) \vee \neg LangaLac(x7) \vee ManancaPeste(x6)) \wedge Cufundar(a)$
$\wedge \neg ManancaPeste(a))$

2.3.9 Reprezentare in forma clauzală

$\{\quad \neg Pasare(x1) \vee Copac(f(x1)), \quad \neg Pasare(x1) \vee Doarme(x1, f(x1)),$
$\neg Cufundar(x3) \vee Pasare(x3), \quad \neg Cufundar(x3) \vee Acvatic(x3),$
$\neg Copac(x4) \vee \neg Pasare(x5) \vee \neg Acvatic(x5) \vee \neg Doarme(x5, x4) \vee LangaLac(x4),$
$\neg Doarme(x6, x7) \vee \neg LangaLac(x7) \vee ManancaPeste(x6),$
$Cufundar(a), \quad \neg ManancaPeste(a) \quad \}$

2.4 Rezolvare prin metoda rezoluţiei

1. $\neg Pasare(x1) \vee Copac(f(x1))$

   Premisă

2. $\neg Pasare(x1) \vee Doarme(x1, f(x1))$

   Premisă

3. $\neg Cufundar(x3) \vee Pasare(x3)$

   Premisă

4. $\neg Cufundar(x3) \vee Acvatic(x3)$

   Premisă

5. $\neg Copac(x4) \vee \neg Pasare(x5) \vee \neg Acvatic(x5) \vee \neg Doarme(x5, x4) \vee LangaLac(x4)$

   Premisă

6. $\neg Doarme(x6, x7) \vee \neg LangaLac(x7) \vee ManancaPeste(x6)$

   Premisă

7. $Cufundar(a)$

   Premisă

8. $\neg ManancaPeste(a)$

   Premisă

9. $\neg Pasare(x1) \vee \neg Acvatic(x1) \vee \neg Doarme(x1, f(x1)) \vee LangaLac(f(x1))$

   Din 1 şi 5, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x5/x1, x4/f(x1)\}$, se elimină literalii $Copac(f(x1))$ şi $\neg Copac(f(x1))$

10. $\neg Pasare(x1) \vee \neg Acvatic(x1) \vee LangaLac(f(x1))$

Din 9 şi 2, prin rezoluţie, se elimină literalii $Doarme(x1, f(x1))$ şi $\neg Doarme(x1, f(x1))$

11. $\neg Pasare(x1) \vee \neg LangaLac(f(x1)) \vee ManancaPeste(x1)$

Din 2 şi 6, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x6/x1, x7/f(x1)\}$, se elimină literalii $Copac(f(x1))$ şi $\neg Copac(f(x1))$

12. $Pasare(a)$

Din 3 şi 7, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x3/a\}$, se elimină literalii $Cufundar(a)$ şi $\neg Cufundar(a)$

13. $Acvatic(a)$

Din 4 şi 7, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x3/a\}$, se elimină literalii $Cufundar(a)$ şi $\neg Cufundar(a)$

14. $\neg Pasare(a) \vee \neg LangaLac(f(a))$

Din 8 şi 11, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x1/a\}$, se elimină literalii $ManancaPeste(a)$ şi $\neg ManancaPeste(a)$

15. $\neg Pasare(a) \vee LangaLac(f(a))$

Din 10 şi 13, prin rezoluţie şi aplicând substituţia $\{x1/a\}$, se elimină literalii $Acvatic(a)$ şi $\neg Acvatic(a)$

16. $\neg LangaLac(f(a))$

Din 12 şi 14, prin rezoluţie se elimină literalii $Pasare(a)$ şi $\neg Pasare(a)$

17. $LangaLac(f(a))$

Din 12 şi 15, prin rezoluţie se elimină literalii $Pasare(a)$ şi $\neg Pasare(a)$

18. $\square$

Din 12 şi 15, prin rezoluţie se elimină literalii $LangaLac(f(a))$ şi $\neg LangaLac(f(a))$ şi se obţine clauza vidă

Am obţinut clauza vidă, deci formula 2.2 de la care am pornit este invalidă. Asta înseamnă că implicaţia iniţială este validă.